This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

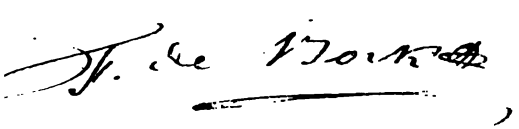
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

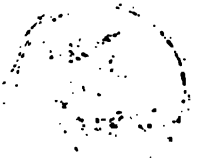
+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`





COURS
DE
MATHÉMATIQUE,

A L'USAGE

De Meſſieurs les CADETS GENTILSHOMMES *de Sa Majeſté le Roi de Pologne.*

TOME SECOND.

ÉLÉMENS
DE GÉOMÉTRIE.

Par M. PLAID, *Chanoine Régulier, Profeſſeur royal de Mathématiques & d'Hiſtoire de l'Ecole Militaire & des Pages du Roi de Pologne, & Membre de l'Académie royale des Sciences & Belles-Lettres de Nancy.*

NEW-YORK

A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Libraire du Roi, pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LXI.

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

PRÉFACE.

CETTE ſeconde Partie du Cours de Mathématiques a pour objet la *Géométrie Élémentaire*; on y trouve les propoſitions de cette ience, qui ont le plus de rapport à la pratie ; toutes celles que ſuppoſent la Géomée compoſée, & les Méchaniques. Elle eſt tagée en treize Chapitres.

Dans le premier, je donne les idées que l'on it ſe former des trois ſortes d'étendue ; à oir, la ligne, la ſurface & le ſolide : j'en ntre les élémens & la maniere dont on peut acevoir qu'elles ſont engendrées.

Pour faire connoître davantage l'objet de Géométrie, je mets en avant les différenes eſpeces de lignes, d'angles, de triangles, quadrilateres & de poligones, &c. J'en exſe les propriétés les plus ſimples, celles qui ffrent, pour ainſi dire, d'elles-mêmes, & les qui tiennent à un petit nombre de véri- claires, & dont par conſéquent la démonſtion eſt la moins compliquée.

Ce que nous ſavons déja eſt le degré qui us éleve aux découvertes ; ainſi le premier apitre qui eſt, pour ainſi dire, la Géomée naturelle, c'eſt-à-dire, ce que l'on ſait Géométrie avant que l'on s'applique à

cette Science, devoit ſervir de baſe à l'édifice entier.

On obſervera encore que, par le moyen de ces propriétés préliminaires, rien n'eſt plus ſuivi ni mieux enchaîné que le ſyſtême des autres propriétés de l'étendue; les ſuppoſitions de même eſpece viennent d'elles-même ſe réunir & ſe ranger ſous les diviſions générales que je me ſuis formées, de façon qu'il ne faut qu'un coup-d'œil & aucun effort pour les parcourir.

Dans le ſecond Chapitre, j'expoſe les propriétés des lignes droites dans leurs différentes poſitions les unes à l'égard des autres; celles qu'elles ont lorſqu'on les tranſporte dans le cercle; je détermine enſuite la meſure de l'angle dans ſes différentes poſitions à l'égard du cercle; je termine ce Chapitre par examiner les angles dans les triangles, dans les quadrilateres & dans les autres figures rectilignes régulieres & irrégulieres.

Le troiſieme Chapitre eſt l'application du ſecond à la pratique; j'y réſous ſucceſſivement les problêmes qui ſont relatifs aux lignes droites conſidérées dans leurs différentes poſitions entr'elles, aux lignes droites conſidérées dans le cercle, aux angles conſidérés dans le cercle & dans les figures rectilignes; j'y donne enfin la conſtruction des figures rectilignes, & l'inſcription de quelques-unes dans le cercle.

Dans le quatrieme Chapitre, je traite des ſurfaces ; je commence par faire la multiplication d'une ligne par elle-même, & celle d'une ligne par une autre, d'où je conclus la valeur du quarré de la ſomme, & celle du quarré de la différence de deux lignes, relativement à ces lignes ; & encore la valeur du rectangle de deux lignes inégales, relativement à la ſomme & à la différence de ces lignes : je détermine enſuite les produiſans des ſurfaces des figures rectilignes & du cercle.

Le Chapitre cinquieme eſt l'application du quatrieme ; j'y donne le toiſé des ſurfaces, c'eſt-à-dire, la maniere de former par la multiplication la ſurface d'une figure, lorſque l'on connoît ſes produiſans en toiſes & parties de la toiſe ; vient enſuite la maniere de décompoſer une ſurface & par l'extraction de la racine quarrée lorſqu'une ſurface étant donnée on veut connoître la ligne dont elle eſt le quarré, & par la diviſion lorſqu'une ſurface étant donnée avec l'un de ſes produiſans, on veut connoître ſon autre produiſant.

Le Chapitre ſixieme eſt un traité des lignes proportionnelles. Après avoir mis en avant les propriétés des raiſons & proportions géométriques dont on fait le plus d'application dans ce Chapitre & dans les ſuivans, j'examine le rapport des droites également inclinées dans différens eſpaces paralleles, d'où

je déduis la théorie des lignes coupées proportionnellement, & les conditions qui rendent les triangles ſemblables; je conſidere les figures ſemblables dans leur diviſion en parties ſemblables, les points ſemblablement poſés à l'égard des lignes droites & à l'égard des figures ſemblables, & le rapport des contours des figures ſemblables; je parcours enſuite ſucceſſivement les lignes proportionnelles que donnent les différentes ſortes de triangles, quelques poligones réguliers & le cercle; enfin pour que la théorie des lignes proportionnelles ne ſoit pas interrompue, je démontre les lignes proportionnelles rélatives à la Trigonométrie, tant celles qui ſervent à la conſtruction des tables des ſinus, tangentes & ſécantes, que celles qui ſervent au calcul des triangles.

Le Chapitre ſeptieme eſt l'application du ſixieme. De la théorie des lignes coupées proportionnellement, je déduis des méthodes pour trouver des quatriemes & troiſiemes proportionnelles, & pour diviſer les lignes en parties proportionnelles.

De la théorie des triangles ſemblables, je déduis les différentes manieres de faire un triangle ſemblable à un triangle donné; ce que j'applique à la meſure des diſtances inacceſſibles.

De la théorie des figures ſemblables, & des

points ſemblablement poſés, je déduis des méthodes pour lever le plan d'un terrein, & pour faire la carte d'un pays, &c.

Des lignes proportionnelles conſidérées dans différentes ſortes de triangles, je déduis la maniere de déterminer la hauteur d'un triangle quelconque, lorſque l'on connoît ſes trois côtés, & de déterminer la ſurface du triangle par le moyen de ſes trois côtés, indépendamment de ſa hauteur.

Des lignes proportionnelles conſidérées dans le décagone & le pentagone régulier, je tire l'inſcription de ces poligones dans le cercle.

Je pars des propriétés du cercle pour déterminer une moyenne proportionnelle géométrique entre deux lignes données, & pour diviſer une ligne en moyenne & extrême raiſon.

Viennent enſuite les regles du nivellement, dont je donne auſſi la pratique; j'applique enfin les propriétés relatives à la Trigonométrie & au calcul des ſinus, tangentes & ſécantes, & à la réſolution des triangles, ce qui donne le moyen de calculer les lignes inacceſſibles, ou conſidérées comme telles.

Le Chapitre huitieme a pour objet le rapport des ſurfaces: j'examine d'abord le rapport des parallélogrammes & celui des triangles conſidérés en général, & lorſqu'ils ont un angle égal.

J'examine enſuite le rapport des figures ſem-

blables conſidérées en général, & dans des ſuppoſitions particulieres; par exemple, lorſque deux figures ſemblables ont pour côtés homologues les deux premieres de trois lignes droites en proportion géométrique continue; & lorſque trois figures ſemblables ont pour côtés homologues les trois côtés d'un triangle rectangle: ce qui me donne occaſion de parler des portions de cercle dont la Géométrie élémentaire donne la quadrature.

Vient enfin le rapport des ſurfaces des figures qui ont des contours égaux.

Le Chapitre neuvieme eſt l'application du huitieme. On y voit d'abord la maniere de changer, d'ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer les triangles, & les figures rectilignes quelconques.

On voit enſuite l'addition, la ſouſtraction, la multiplication, la diviſion, &c. des figures ſemblables.

Dans le Chapitre dixieme, je conſidere les lignes droites dans leurs poſitions à l'égard des plans, & les plans dans leurs poſitions les uns à l'égard des autres; ce qui eſt une introduction au traité des ſolides.

Dans l'onzieme Chapitre, je détermine les produiſans de la ſurface & de la ſolidité des corps priſmatiques & pyramidaux, & de la ſphere; & je démontre les rapports de ces corps conſidérés quant à leur ſurface, & quant à leur ſolidité.

Dans le douzieme Chapitre, qui eſt l'application de l'onzieme, je donne le toiſé des ſolides; j'enſeigne à les compoſer par la multiplication, & à les décompoſer par la diviſion & par l'extraction de la racine cubique. Ce qui eſt ſuivi du changement, de l'addition & de la ſouſtraction des ſolides; je termine par multiplier & diviſer les co ps ſemblables.

Dans le treizieme Chapitre, qui a pour titre l'application de l'Algebre à la réſolution de quelques problêmes de la Géométrie élémentaire, après avoir expliqué en peu de mots ce en quoi conſiſte l'art de réſoudre les problêmes de Géométrie par le moyen de l'Algebre; je donne de ſuite dans une premiere ſection la maniere d'exprimer algébriquement les quantités géométriques & leurs rapports; la méthode générale qu'il faut ſuivre dans la réſolution analytique des problêmes de Géométrie; la maniere d'exprimer géométriquement les quantités algébriques, ce qui me conduit à la conſtruction des équations déterminées du premier & du ſecond degré.

Dans la ſeconde ſection j'applique les méthodes que j'ai données dans la premiere à la réſolution des problêmes déterminés du premier & du ſecond degré.

Dans les deux ſections je m'applique à montrer, lorſque l'occaſion s'en préſente, le parfait accord de l'analyſe avec la Géométrie; je

fais voir que lorſque l'analyſe donne par une équation du ſecond degré deux valeurs de l'inconnue, qui ſont l'une poſitive, & l'autre négative, ou toutes deux poſitives, ou toutes deux négatives, ou toutes deux égales, ou toutes deux imaginaires, la réſolution géométrique donne les mêmes valeurs.

Ce treizieme Chapitre, déja très-utile par lui-même, ſert d'introduction à la méthode que j'emploie dans la Géométrie compoſée.

AXIOMES ou Propoſitions évidentes dont on ſe ſert dans la Géométrie.

I. Le tout eſt égal à toutes ſes parties priſes enſemble.

II. Lorſque deux grandeurs ſont égales, la moitié de la plus grande eſt plus grande que la moitié de la plus petite, le tiers de la plus grande eſt plus grand que le tiers de la plus petite, &c.

III. Si à des grandeurs égales on ajoute une même grandeur, ou des grandeurs égales, les ſommes ſeront égales.

Et réciproquement deux grandeurs ſont égales, lorſqu'en ajoutant à chacune une même quantité les ſommes ſont égales.

IV. Si de grandeurs égales on retranche des grandeurs égales, ou une même grandeur, les reſtes ſeront égaux.

V. Si à des grandeurs inégales on ajoute des grandeurs égales, ou une même grandeur, les ſommes ſeront inégales, & la plus grande ſomme ſera celle qui renfermera la plus grande des deux grandeurs inégales.

VI. Si de grandeurs inégales on retranche des grandeurs égales, ou une même grandeur, les reſtes ſeront inégaux, & le plus grand reſte ſera celui de la plus grande des deux grandeurs inégales.

Et ſi de deux grandeurs égales, ou d'une même grandeur, on retranche des grandeurs inégales, les reſtes ſeront inégaux, & la ſouſtraction de la plus petite quantité donnera le plus grand reſte.

VII. *a* étant plus grand que *b*, & *c* étant plus grand que *d*, la ſomme des deux plus grandes quantités *a*, *c*,

ſera plus grande que la ſomme des deux plus petites quantités b, d.

VIII. a étant plus grand que b, & b étant plus grand que c, la premiere grandeur a ſera à plus forte raiſon plus grande que la troiſieme grandeur c.

IX. Si la grandeur a eſt égale à la grandeur b, & que cette grandeur b ſoit égale à une troiſieme grandeur c, la grandeur a ſera égale à la troiſieme grandeur c.

X. D'un endroit à un autre il n'y a qu'un ſeul plus court chemin.

XI. Deux grandeurs étant égales, ſi on les multiplie chacune par une même quantité, les produits ſeront égaux.

Si on les diviſe chacune par une même quantité, les quotiens ſeront égaux.

Leurs puiſſances de même degré quelconque, & leurs racines de même degré quelconque ſeront égales.

Signes que l'on emploie dans la Géométrie.

Les ſignes dont on va parler ſont connus de tous ceux qui ſavent l'Algebre ; on ne les placera ici que pour rendre ce volume moins dépendant du premier.

Le ſigne $+$ que l'on nomme *plus*, marque l'addition ; c'eſt-à-dire, que la grandeur qui le ſuit eſt ajoutée à celle qui le précede.

Par exemple, l'expreſſion $a + b$, que l'on énonce en diſant a plus b, ſignifie que la grandeur b eſt ajoutée à la grandeur a.

Le ſigne $-$ que l'on nomme *moins*, marque la ſouſtraction ; c'eſt-à-dire, que la grandeur qui le ſuit doit être retranchée de celle qui le précéde.

Par exemple, l'expreſſion $a - b$, que l'on énonce

en disant a moins b, signifie que la grandeur b doit être retranchée de la grandeur a.

Le signe $\times$ que l'on nomme *multiplié par*, signifie que la grandeur qui le précede doit être multipliée par celle qui le suit.

Par exemple, l'expression $a \times b$, signifie que la grandeur a doit être multipliée par la grandeur b.

$\overline{a+b+c} \times d$, représente la multiplication de la somme $a+b+c$ par la grandeur d.

$\overline{a+b+c} \times \overline{d+f}$, représente la multiplication de la somme $a+b+c$ par la somme $d+f$.

$\overline{a+b+c} \times \overline{d-f}$, représente la multiplication de la somme $a+b+c$ par la différence $d-f$, &c.

Une barre horizontale entre deux quantités dont l'une est au-dessus & l'autre au-dessous, se nomme *divisé par*, & désigne la division de la quantité supérieure par l'inférieure.

Par exemple, l'expression $\frac{a}{b}$ désigne que la grandeur a doit être divisée par la grandeur b.

L'expression a^2 désigne le quarré de la grandeur a.

$\overline{a+b}^{p}$ désigne que la quantité $a+b$ doit être élevée à la puissance du degré quelconque p.

$\sqrt{a}$ désigne la racine quarrée de la grandeur a, $\sqrt[3]{a}$ en désigne la racine cubique.

$\sqrt[p]{a+b}$ désigne la racine du degré quelconque p de la quantité $a+b$.

Le signe $=$ que l'on nomme *égal*, désigne que ce qui le précede est égal à ce qui le suit.

Par exemple, l'expression $a+b=c$, désigne que la somme des grandeurs a, b est égale à la grandeur c.

Les signes $>$, $<$ que l'on nomme le premier *plus*

Art. V. *Des propriétés générales des poligones*, 11
CHAPITRE II. *Des lignes droites conſidérées dans les différentes poſitions qu'elles peuvent avoir entr'elles & dans le cercle.*
De la meſure des angles conſidérés dans le cercle & dans les figures rectilignes.
SECTION PREMIERE. *Des lignes droites conſidérées dans les différentes poſitions qu'elles peuvent avoir entr'elles*, 25
Article premier. *Des lignes perpendiculaires & des obliques*, 26
Art. II. *Des propriétés des paralleles coupées par une droite*, 36
SECTION II. *Des lignes droites conſidérées dans le cercle*, 42
Article premier. *De la grandeur reſpective des droites qu'on peut mener à la circonférence du cercle, d'un point qui n'en eſt pas le centre*, ibid.
Art. II. *Des propriétés des droites tangentes du cercle*, 50
Art. III. *Des propriétés des perpendiculaires & des paralleles conſidérées dans le cercle*, 51
SECTION III. *De la meſure des angles conſidérés dans le cercle & dans les figures rectilignes*, 57
Article premier. *De la meſure des angles conſidérés dans le cercle*, ibid.
Art. II. *Des angles conſidérés dans les figures rectilignes*, 66
CHAPITRE III. *Application du ſecond Chapitre.*
SECTION PREMIERE. *Des problêmes relatifs aux lignes droites conſidérées dans leurs différentes poſitions les unes à l'égard des autres*, 79
Problême premier. *D'un point quelconque donné ſur une droite, élever une perpendiculaire ſur cette droite*, ibid.

Probl.

Probl. II. *D'un point quelconque donné en-dehors d'une droite, mener une perpendiculaire ſur cette droite,* 81
Probl. III. *Par l'extrêmité d'une droite, mener une perpendiculaire ſur cette droite,* ibid.
Probl. IV. *Diviſer une droite donnée en deux parties égales,* 82
Probl. V. *Par un point, pris en-dehors d'une droite, mener une parallele à cette droite,* 83
Section II. *Application des propriétés des droites conſidérées dans le cercle,* 84
Problême premier. *Faire paſſer une circonférence de cercle par trois points quelconques qui ne ſont pas en ligne droite,* ibid.
Probl. II. *Couper un arc donné en deux parties égales,* 86
Probl. III. *Mener une tangente à un point donné d'une circonférence,* 87
Probl. IV. *Déterminer le point où une tangente rencontre la circonférence,* ibid.
Probl. V. *D'un point pris en-dehors d'un cercle, mener une tangente à ce cercle,* 88
Section III. *Des problêmes relatifs aux angles conſidérés dans le cercle & dans les figures rectilignes,* 89
Problême premier. *Faire ſur une droite donnée, à un point donné de cette droite, un angle égal à un autre angle donné,* ibid.
Probl. II. *Diviſer en deux parties égales un angle donné,* 90
Probl. III. *Meſurer le nombre des dégrés d'un angle donné,* 91
Probl. IV. *Meſurer l'angle ſous lequel on voit d'un endroit donné une droite propoſée,* ibid.
Probl. V. *Faire ſur une droite donnée, à un point donné de cette ligne, un angle d'un nombre de dégrés déterminé,* 92

Prob. [illegible] *Sur une droite donnée un angle du [illegible] un angle donné*, 93
Prob. [illegible] *Sur une droite donnée un ſegment ca[illegible] angle donné*, 94
Prob. VII. *Mesurer un angle inacceſſible dont on ſuppoſe ſeulement que l'on voit les côtés*, 95
Prob. VIII. *Déterminer dans un poligone régulier quelconque l'angle du centre, l'angle du poligone, & [illegible] le côté, le nombre des côtés de ce poligone [illegible]*, ibid.
SECTION IV. *De la conſtruction des figures rectilignes*, 96
Problème premier. *Sur une droite donnée conſtruire un triangle equilatéral*, ibid.
Prob. II. *Conſtruire un triangle dont on a les trois côtés donnés*, 97
Prob. III. *Conſtruire un triangle dont on a deux côtés & l'angle compris entre ces côtés*, 98
Prob. IV. *Conſtruire un triangle dont on a la baſe & les angles ſur cette baſe*, ibid.
Prob. V. *Conſtruire un quarré ſur une ligne droite donnée*, 99
Prob. VI. *Conſtruire un rectangle qui ait pour côtés contigus deux droites données*, ibid.
Prob. VII. *Faire un parallélogramme dont on a les deux côtés contigus avec l'angle compris entre ces côtés*, 100
Prob. VIII. *Conſtruire ſur une droite donnée un poligone regulier d'un nombre de côtés déterminé*, ibid.
Prob. IX. *Inſcrire dans un cercle donné un quarré & les figures regulieres d'un nombre de côtés continuellement double*, 102
Prob. X. *Inſcrire dans un cercle donné un hexagone regulier, un triangle équilateral, & les figures regulieres d'un nombre de côtés continuellement double du nombre des côtés de l'hexagone*, 103

Probl. XI. *Inſcrire, par le moyen du rapporteur, dans un cercle donné un poligone régulier quelconque,* 105
CHAPITRE IV. *Des produits des lignes multipliées les unes par les autres & par elles-mêmes, & des produiſans des ſurfaces.*
Définitions, 107
SECTION PREMIERE. *Des produits des lignes multipliées les unes par les autres, & par elles-mêmes,* 109
Article premier. *Expreſſion géométrique du produit de deux lignes multipliées l'une par l'autre, & du produit d'une ligne multipliée par elle-même,* ibid.
Art. II. *De la valeur du quarré de la ſomme de deux lignes, & de celle du quarré de la différence de deux lignes, relativement à ces lignes.*
De la valeur du rectangle de deux lignes inégales, relativement à la ſomme & à la différence de ces lignes, 114
SECTION II. *Des produiſans des ſurfaces,* 120
Article premier. *Des produiſans du parallélogramme, du triangle & du trapézoïde,* ibid.
Art. II. *Des produiſans de la ſurface des poligones,* 125
CHAPITRE V. *Application du Chapitre quatrieme.*
Du Toiſé des ſurfaces.
Problème premier. *Meſurer une ſurface dont on connoît les produiſans en toiſes & en parties de la toiſe,* 131
Probl. II. *Une ſurface évaluée en toiſes quarrées, toiſes pieds & toiſes pouces, &c. étant donnée avec l'un de ſes produiſans, déterminer ſon autre produiſant,* 144
Probl. III. *Une ſurface étant évaluée en toiſes quarrées, toiſes pieds, toiſes pouces, &c. réduire en pieds quarrés, pouces quarrés, &c. ſes parties moindres que la toiſe quarrée,* 149
Probl. IV. *Extraire la racine quarrée d'une ſurface éva-*

luée en toiſes quarrés, toiſes pieds, toiſes pouces, &c. 151
CHAPITRE VI. *Des raiſons & proportions des lignes.*
SECTION PREMIERE. *Des raiſons & proportions géométriques en général,* 154
Article premier. *Définitions,* ibid.
Art. II. *Des principes relatifs aux raiſons & aux proportions,* 157
Art. III. *Des propriétés de la raiſon compoſée,* 159
Art. IV. *Des propriétés de la proportion géométrique,* 161
SECTION II. *Des lignes proportionnelles conſidérées dans les eſpaces paralleles.*
Des lignes coupées proportionnellement.
Des conditions qui rendent les triangles ſemblables, 167
Définitions, ibid.
Article premier. *Des lignes conſidérées dans les eſpaces paralleles,* 168
Art. II. *Des lignes coupées proportionnellement,* 171
Art. III. *Des conditions qui rendent les triangles ſemblables,* 174
SECTION III. *Des figures ſemblables conſidérées dans leurs diviſions en parties ſemblables.*
Des points ſemblablement poſés à l'égard des lignes droites, & à l'égard des figures ſemblables.
Du rapport des contours des figures ſemblables, 179
Définitions, ibid.
Article premier. *Des figures ſemblables conſidérées dans leurs diviſions en parties ſemblables,* 181
Art. II. *Des points ſemblablement placés à l'égard des lignes droites, & à l'égard des figures ſemblables,* 185
Art. III. *Du rapport des contours des figures ſemblables,* 194
SECTION IV. *Des lignes proportionnelles conſidérées dans différentes ſortes de triangles, dans quelques poligones réguliers, & dans le cercle,* 196

Article premier. *Des lignes proportionnelles considérées dans différentes sortes de triangles*, ibid.
Art. II. *Des lignes proportionnelles considérées dans quelques poligones réguliers*, 204
Art. III. *Des lignes proportionnelles considérées dans le cercle*, 208
Section V. *Des propriétés du cercle, relatives à la Trigonométrie*, 214
Article premier. *Définitions*, ibid.
Art. II. *Des propriétés relatives au calcul des sinus*, 218
Art. III. *Des propriétés relatives au calcul des triangles*, 223
CHAPITRE VII. *Application du Chapitre sixieme.*
Section premiere. *Application de la théorie des lignes coupées proportionnellement, & des triangles semblables*, 230
Problème premier. *Diviser une droite donnée en des parties proportionnelles aux parties d'une ligne déja divisée*, ibid.
Probl. II. *Diviser une droite donnée en un nombre déterminé de parties égales*, 231
Probl. III. *Trouver une ligne droite quatrieme proportionnelle à trois lignes données*, 232
Probl. IV. *Diviser plusieurs lignes droites de différente grandeur en des parties proportionnelles à celles d'une droite donnée*, 234
Probl. V. *Faire un triangle semblable à un triangle donné*, 236
Probl. VI. *Mesurer par le moyen des triangles semblables une ligne seulement accessible par l'une de ses extrêmités*, 237
Probl. VII. *Mesurer par le moyen des triangles semblables une ligne entiérement inaccessible*, 238
Section II. *Application de la théorie des figures semblables*, 240

Problême premier. *Une figure étant donnée, faire une figure ſemblable ſur une droite donnée, comme homologue à l'un des côtés de la figure propoſée,* ibid.
Probl. II. *Lever le plan d'un terrein,* 241
Probl. III. *Lever le plan d'un terrein dans lequel on ne peut, ou l'on ne veut, entrer,* 245
Probl. IV. *Faire la carte d'une grande campagne ou d'un pays,* 247
Probl. V. *La ſituation de trois points étant repréſentée ſur une carte, déterminer ſur la même carte la poſition d'un quatrieme point d'où l'on voie les diſtances des trois points donnés ſous des angles donnés,* 251
SECTION III. *Application de la théorie des lignes proportionnelles conſidérées dans différentes ſortes de triangles, dans quelques poligones réguliers, & dans le cercle,* 252
Problême premier. *Dans un triangle rectangle, 1°. deux côtés étant donnés, connoître le troiſieme; 2°. les trois côtés étant donnés, connoître chaque ſegment de l'hypothénuſe, fait par la perpendiculaire abaiſſée du ſommet de l'angle droit, & déterminer enſuite cette perpendiculaire,* ibid.
Probl. II. *Connoiſſant les trois côtés d'un triangle quelconque, & ſuppoſant que du ſommet du plus grand angle on a abaiſſé une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, connoître 1°. chaque ſegment de ce même côté; 2°. la perpendiculaire; 3°. déterminer la ſurface du triangle,* 254
Probl. III. *Diviſer une droite donnée en moyenne & extrême raiſon,* 257
Probl. IV. *1°. Inſcrire dans un cercle donné un décagone & un pentagone réguliers. 2°. Trouver par une ſeule conſtruction les côtés de l'hexagone, du décagone & du pentagone réguliers, inſcriptibles dans un même cercle,* 258

Probl. V. *Inſcrire dans un cercle donné un quindécagone régulier*, 260
Probl. VI. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites données*, 262
Du Nivellement, 263
Principes du Nivellement, 264
Maniere de déterminer la différence du niveau vrai au niveau apparent, 265
Table pour la différence des niveaux vrais aux niveaux apparens, 268
Pratique du Nivellement, 270
SECTION IV. *Application des propriétés du cercle, relatives à la Trigonométrie*, 277
De la Trigonométrie, ibid.
Article premier. *Conſtruction des tables des ſinus, tangentes & ſécantes*, 279
Art. II. *De la réſolution des triangles*, 285
Art. III. *Application des regles générales précédentes*, 295
CHAPITRE VIII. *Du rapport des ſurfaces des figures.*
SECTION PREMIERE. *Du rapport des parallélogrammes ou des triangles conſidérés en général, & du rapport des mêmes figures lorſqu'elles ont un angle égal*, 303
Article premier. *Du rapport des parallélogrammes ou des triangles conſidérés en général*, ibid.
Art. II. *Du rapport des parallélogrammes ou des triangles lorſqu'ils ont un angle égal*, 305
SECTION II. *Du rapport des figures ſemblables*, 307
Article premier. *Du rapport des figures ſemblables, conſidérées en général*, ibid.
Art. II. *Du rapport des figures ſemblables, conſidérées dans quelques ſuppoſitions particulieres*, 310
SECTION III. *Du rapport des figures conſidérées dans l'égalité de leurs contours*, 318

Article premier. *Du rapport des triangles iſopérimetres*, ibid.
Art. II. *Du rapport des quadrilateres iſopérimetres*, 322
Art. III. *Du rapport des poligones iſopérimetres*, 329
CHAPITRE IX. *Application du Chapitre huitieme.*
SECTION PREMIERE. *Du changement, de l'addition, de la ſouſtraction, de la multiplication & de la diviſion des triangles*, 336
Problême premier. *Faire un triangle de même ſurface qu'un triangle donné, & dont la hauteur ſoit égale à une droite donnée*, ibid.
Probl. II. *Faire un quarré égal à un triangle donné*, 337
Probl. III. *Faire un parallélogramme de même ſurface qu'un triangle donné, & dont la hauteur ſoit égale à une droite donnée*, ibid.
Probl. IV. *Exprimer par des lignes droites les rapports de pluſieurs triangles donnés*, 338
Probl. V. *Faire un triangle égal à la ſomme de tant de triangles qu'on voudra*, 339
Probl. VI. *Faire un triangle qui ſoit la différence de deux autres triangles donnés*, ibid.
Probl. VII. *Faire un triangle avec lequel un triangle donné ſoit dans le rapport de deux droites données*, 340
Probl. VIII. *Faire un triangle qui ſoit un multiple ou un ſous-multiple déterminé d'un triangle donné*, 341
Probl. IX. *Diviſer un triangle par des droites menées du ſommet à la baſe, en des parties proportionnelles aux ſegmens d'une droite donnée*, ibid.
Probl. X. *Diviſer un triangle par des droites qui paſſent par un point donné dans la ſurface, en des parties proportionnelles aux ſegmens d'une ligne donnée*, 342
SECTION II. *Du changement, de l'addition, ſouſtrac-*

tion, multiplication & diviſion des figures rectilignes quelconques, 345
Problême premier. *Changer une figure rectiligne en une autre de même ſurface, & qui ait un côté de moins,* ibid.
Probl. II. *Changer une figure rectiligne quelconque en un triangle de même ſurface,* 346
Probl. III. *Faire un triangle d'une hauteur donnée égal à une figure rectiligne quelconque propoſée,* 347
Probl. IV. *Exprimer par des lignes droites les rapports de pluſieurs figures rectilignes propoſées,* ibid.
Probl. V. *Faire un triangle égal à la ſomme de tant de figures rectilignes qu'on voudra,* 348
Probl. VI. *Faire un triangle égal à la différence de deux figures rectilignes propoſées,* ibid.
Probl. VII. *Faire un triangle qui ſoit un multiple, ou un ſous-multiple déterminé d'une figure rectiligne propoſée,* ibid.
Probl. VIII. *Diviſer une figure rectiligne quelconque par des droites menées par un point donné dans ſa ſurface, en des parties proportionnelles aux ſegmens d'une droite donnée,* 349
Probl. IX. *Diviſer une figure rectiligne quelconque par des droites qui paſſent par un point donné ſur l'un des côtés du poligone, en des parties proportionnelles aux ſegmens d'une droite donnée,* 350
Section III. *De l'addition, ſouſtraction, multiplication & diviſion des figures ſemblables,* 351
Problême premier. *Trouver le côté d'un quarré égal à la ſomme de pluſieurs quarrés donnés,* ibid.
Probl. II. *Trouver le côté du quarré égal à la différence de deux quarrés donnés,* 352
Probl. III. *Etant donnés les côtés homologues de tant de figures ſemblables que l'on voudra, trouver le côté*

homologue d'une figure ſemblable égale à leur ſomme, 353
Probl. IV. *Etant donnés les côtés homologues de deux figures ſemblables, trouver le côté homologue d'une figure ſemblable égale à leur différence,* 354
Probl. V. *Faire une figure ſemblable à une figure donnée, avec laquelle celle-ci ſoit dans le rapport de l'un de ſes côtés à une droite donnée,* ibid.
Probl. VI. *Faire une figure ſemblable à une figure donnée, enſorte qu'elle en ſoit un multiple ou un ſous-multiple déterminé,* 355
Probl. VII. *Faire une figure ſemblable à une figure donnée, avec laquelle elle ſoit dans le rapport de deux droites données,* 356
Probl. VIII. *Exprimer par des lignes droites le rapport de tant de figures ſemblables que l'on voudra,* ibid.
Probl. IX. *Une figure étant donnée, faire des figures ſemblables dont la ſomme ſoit égale à cette figure, & proportionnelle aux ſegmens d'une droite donnée,* 357
Probl. X. *Deux triangles étant donnés, faire un troiſieme triangle qui ſoit égal à l'un & ſemblable à l'autre,* 359
Probl. XI. *Faire une figure rectiligne de même ſurface qu'un triangle donné, & ſemblable à une autre figure rectiligne donnée,* 360
Probl. XII. *Changer une figure rectiligne quelconque propoſée en une figure ſemblable à une figure donnée,* 361
CHAPITRE X. *Des lignes droites conſidérées dans leur poſition à l'égard des plans, & des plans conſidérés dans leur poſition les uns à l'égard des autres. Définitions,* 362
SECTION PREMIERE. *Des lignes droites conſidérées dans leur poſition à l'égard des plans,* 363

Propoſition premiere. *Si deux points d'une droite ſont dans un plan, toute cette ligne, même prolongée à l'infini, ſera dans ce plan prolongé auſſi à l'infini,* ibid.

Prop. II. *Deux lignes droites qui ſe coupent ſont dans un même plan, & déterminent la poſition de ce plan,* 364

Prop. III. *Une droite eſt perpendiculaire à un plan lorſqu'elle l'eſt à deux droites menées dans ce plan par ſon pied. Et d'un même point on ne peut mener qu'une perpendiculaire à ce plan,* ibid.

Prop. IV. *De l'extrêmité d'une droite, oblique à un plan, ayant abaiſſé une perpendiculaire ſur ce plan, ſi l'on joint par une droite le pied de l'oblique, & celui de la perpendiculaire, l'angle que fera cette droite avec l'oblique, ſera l'angle d'inclinaiſon de l'oblique ſur ce plan.*

Une droite, oblique à un plan, ne peut être perpendiculaire qu'à une ſeule droite de ce plan qui paſſe par ſon pied, 366

Prop. V. *Deux droites paralleles ſont dans un même plan, & ſi l'une eſt perpendiculaire à un plan, l'autre le ſera auſſi,* 368

Prop. VI. *Si deux droites ſont perpendiculaires à un plan, elles ſont dans le même plan, & de plus elles ſont paralleles,* 369

Section II. *Des plans conſidérés dans leur poſition les uns à l'égard des autres,* 371

Propoſition premiere. *Deux angles ſont égaux lorſque, étant dans des plans différens, chaque côté de l'un eſt parallele à chaque côté de l'autre,* ibid.

Prop. II. *Si dans deux plans qui ſe rencontrent on mene deux perpendiculaires à la ſection commune par un même point de cette ſection, l'angle formé par ces*

deux perpendiculaires ſera égal à l'angle des deux plans, ibid.
Prop. III. *Un plan eſt perpendiculaire ſur un autre plan, lorſqu'il renferme une droite qui lui eſt perpendiculaire*, 372
Prop. IV. *La commune ſection de deux plans perpendiculaires ſur un troiſieme, eſt une droite perpendiculaire ſur ce même plan*, 373
Prop. V. *Si une droite eſt perpendiculaire à deux plans, ces deux plans ſont paralleles*, 374
Prop. VI. *Les communes ſections de deux plans paralleles, coupés ou terminés par un troiſieme plan, ſont paralleles*, 375
Prop. VII. *Deux plans étant paralleles, une ligne droite ne peut être perpendiculaire à l'un de ces plans qu'elle ne le ſoit auſſi à l'autre*, ibid.
Problême premier. *D'un point pris hors d'un plan, abaiſſer une perpendiculaire ſur ce plan*, 376
Probl. II. *D'un point pris ſur un plan, élever une perpendiculaire ſur ce plan*, 377.
CHAPITRE XI. *Des ſolides ou des corps.*
SECTION PREMIERE. *Des priſmes & des cylindres*, 378
Définitions, ibid.
Article premier. *Des priſmes & des cylindres conſidérés par rapport à leur ſurface*, 382
Art. II. *Des priſmes & des cylindres conſidérés relativement à leur ſolidité*, 385
SECTION II. *Des pyramides & des cônes*, 389
Définitions, ibid.
Article premier. *Propriétés fondamentales des pyramides & des cônes*, 392
Art. II. *Des pyramides & des cônes conſidérés quant à leur ſurface*, 403

Art. III. *Des pyramides & des cônes considérés quant à leur solidité*, 407
Section III. *De la sphere*, 414
Définitions, ibid.
Article premier. *De la sphere considérée quant à la surface*, 417
Art. II. *De la sphere considérée relativement à sa solidité*, 422
Section IV. *Des corps semblables, de leurs propriétés générales, & du rapport de leurs surfaces & de leur solidité*, 424
Article premier. *Définitions & propriétés générales des corps semblables*, ibid.
Art. II. *Rapport des surfaces des corps semblables*, 429
Art. III. *Rapport des solides des corps semblables*, 432
CHAPITRE XII. *Application du Chapitre précédent.*
Section premiere. *Du toisé des solides*, 439
Définitions, ibid.
Principes du toisé des solides, 443
Section II. *Du toisé des bois*, 456
Section III. *Du changement des solides & de leur addition. De la multiplication & de la division des solides semblables*, 463
CHAPITRE XIII. *Application de l'Algebre à la résolution de quelques problêmes de la Géométrie élémentaire*, 472
Section premiere. *De la construction & de la résolution des équations*, 473
Article premier. *Maniere d'exprimer par des caracteres & par des calculs algébriques les quantités géométriques, leurs rapports, leurs propriétés, &c.* ibid.
Art. II. *Maniere de résoudre algébriquement les problêmes de Géométrie*, 474

Art. III. *Où l'on enſeigne à exprimer géométriquemen les quantités algébriques*, 47
Art. IV. *Conſtruction des équations déterminées du pre mier & du ſecond degré*, 48
Section II. *Où l'on applique la ſection précédente à l réſolution de quelques problêmes déterminés du pre mier & du ſecond degré*, 48
Article premier. *De la réſolution des problêmes déter minés du premier degré*, ibid
Art. II. *De la réſolution des problêmes déterminés d ſecond degré*, 49

Fin de la Table du Tome ſecond.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Objet de la Géométrie ; Définitions & propriétés préliminaires.

SECTION PREMIERE.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

ARTICLE I.

Ce que c'eſt que la Géométrie.

1. Ce mot *Géométrie* ne ſignifie autre choſe que meſure du terrein ; ce qui ſemble indiquer que la meſure des terreins a fait naître les premieres propoſitions de la Géométrie. Si cela eſt ainſi, l'origine de cette ſcience ſera auſſi ancienne que la diſtinction du mien & du mien.

La *Géométrie*, considérée en elle-même, est la science des propriétés de l'étendue, & si on la regarde dans l'état auquel elle est parvenue depuis son origine, on la définira la somme des vérités que l'on a découvertes en examinant ensemble ou séparément les trois dimensions; à savoir, la longueur, la largeur, & la profondeur des corps.

ARTICLE II.

Le solide, la surface, la ligne & le point mathématiques.

Figure 1. 1. Pour concevoir ce que l'on doit entendre par les dimensions des corps considérés ensemble ou séparément, nous nous fixerons à un corps quelconque ABFEDCGH; remarquant bien ce qu'il offre à nos yeux, nous verrons d'abord un espace solide ABFE DCGH, & ensuite une enveloppe infiniment mince qui contient & termine ce corps, dont, par exemple, la superficie ABCD est partie: on verra de plus des arêtes, telles que AB, DC; enfin les extrêmités des arêtes, telles que D, C, G.

Examinant toutes ces choses en détail, on découvre:

Fig. 1. 1°. Que l'espace solide ABFEDCGH est la réunion des trois dimensions; car on voit qu'il s'étend en long selon AB, en large selon AE, & en hauteur & profondeur, selon AD.

Fig. 2. 2°. Une partie de l'enveloppe de ce corps, par exemple, la superficie ABCD, est la réunion de deux dimensions: elle a de la longueur selon AB, & de la largeur selon AD; mais elle n'a pas d'épaisseur, puisqu'elle termine celle du corps.

Fig. 3. 3°. Une arête telle que DC, a évidemment de la longueur; mais elle n'a ni épaisseur, puisque la surface ABCD qu'elle termine n'en a point, ni largeur,

autrement elle ne termineroit pas la même ſurface ABCD, mais ſeroit elle-même une ſurface.

4°. Enfin l'extrêmité d'une des arêtes, par exemple, l'extrêmité D n'a ni largeur, ni épaiſſeur, puiſque l'arête elle-même n'en a point, ni longueur; car ſi elle en avoit, elle ne ſeroit plus l'extrêmité de l'arête. *Fig.* 3.

De cet examen on déduira les définitions ſuivantes:

Le *ſolide* eſt l'étendue conſidérée avec les trois dimenſions.

La *ſurface* eſt l'étendue en longueur & largeur.

L'étendue en longueur ſeulement ſe nomme *ligne*.

Le *point mathématique* eſt ce que l'on conſidere ſans aucune dimenſion.

ARTICLE III.

Génération du ſolide, de la ſurface & de la ligne.

3. Reprenons le corps ABFEDCGH, & eſſayons de découvrir la maniere dont on peut imaginer que les trois ſortes d'étendue ſont engendrées. *Fig.* 1.

Que la ſurface ABFE s'éleve juſqu'à ce qu'elle ait pris la poſition DCGH, il eſt évident que l'eſpace qu'elle parcourra ſera le ſolide ABFEDCGH, puiſque cet eſpace aura la même longueur AB, la même largeur AE, & la même hauteur AD que ce ſolide.

Que l'arête AB ſe meuve le long des arêtes AD, BC pour prendre la poſition DC, l'eſpace qu'elle parcourra ſera une ſurface égale à ABCD; car cet eſpace aura pour longueur l'arête AB qui s'eſt mue, pour largeur une des arêtes AD, BC que l'arête AB a parcouru, & manquera d'épaiſſeur, puiſque l'arête AB qui l'a formé n'en a point. *Fig.* 2.

Qu'enfin l'extrêmité D de l'arête DC ſe meuve le long de cette arête DC, pour prendre la poſition *Fig.* 3.

C; l'eſpace que le point D parcourra n'aura ni épaiſſeur, ni largeur, puiſque ce point D en manque, mais il aura une longueur égale à DC : ainſi cet eſpace ſera l'arête ou la ligne DC.

En généraliſant ces découvertes, on dira que

Le *ſolide* peut être conſidéré comme la trace ou l'eſpace que parcourt une ſurface qui ſe meut de façon que toutes ſes parties vont de front.

La *ſurface* peut être conſidérée comme l'eſpace que parcourt une ligne qui ſe meut de façon que toutes ſes parties vont de front.

La *ligne* peut être conſidérée comme la trace d'un point qui change de poſition.

ARTICLE IV.

Elémens du ſolide, de la ſurface & de la ligne.

Fig. 1. 4. Concevons qu'entre les ſurfaces oppoſées ABFE, DCGH du corps ABFEDCGH, on a placé dans toute l'épaiſſeur AD des tranches ou des ſurfaces égales chacune à la ſurface ABFE, & couchées les unes ſur les autres, il en réſultera un ſolide évidemment égal au corps ABFEDCGH.

Fig. 2. Qu'entre les arêtes AB, DC on couche les unes ſur les autres, le long des arêtes AD, BC des lignes égales chacune à AB, la ſomme de ces lignes ſera évidemment égale à la ſurface ABCD.

Fig. 3. Que le long de l'arête DC on poſe des points, cette ſuite de points ſera évidemment une longueur égale à l'arête DC.

Ainſi le *ſolide* peut être conſidéré comme un amas de ſurfaces couchées les unes ſur les autres.

La ſurface peut être conſidérée comme une ſomme de lignes poſées les unes à côté des autres.

Et l'on peut regarder la ligne comme une ſuite de points.

ARTICLE V.

La ligne droite & la ligne courbe.

5. La *ligne droite*; par exemple AC, eſt la trace d'un point qui va d'un endroit A à un endroit C, ſans s'écarter d'aucun côté. *Fig. 4.*

Par conſéquent la ligne droite eſt le plus court chemin ou la diſtance des points entre leſquels elle eſt tirée. La ligne droite AC eſt la diſtance du point A au point C.

6. La *ligne courbe*, par exemple ABC, ou ADC eſt la trace d'un point qui va d'un endroit A à un autre endroit C, en s'écartant de quelque côté. *Fig. 4.*

La ligne courbe n'eſt donc pas la diſtance des points entre leſquels elle eſt tirée.

ARTICLE VI.

L'angle & ſes différentes eſpeces.

7. L'ouverture ACD de deux lignes AC, CD qui ſe rencontrent en un point C, eſt ce qu'on appelle *angle*. *Fig. 5.*

Les deux lignes AC, CD qui forment l'angle ſe nomment les côtés de l'angle; le point C de rencontre des deux côtés de l'angle, s'appelle *ſommet de l'angle*.

On nomme un angle indifféremment ou par la lettre qui déſigne ſon ſommet, ou par les trois lettres qui expriment ſes côtés. Dans ce dernier cas on obſerve de placer au milieu de la nomination la lettre du ſommet : ainſi dans la figure 5 on dira l'angle ACD, & dans la figure 6, l'angle B; on pourra ſe ſervir de cette derniere expreſſion toutes les fois que

le ſommet ne ſera pas commun à deux ou pluſieurs angles.

8. Un angle, tel que ACD, eſt dit *droit*, lorſque l'un CD de ſes côtés ne penche ni à droite, ni à gauche à l'égard de l'autre côté AC.

Fig. 5. 9. Un angle, tel que ACE, eſt dit *obtus*, lorſque ſes côtés AC, CE ſont plus ouverts que ceux de l'angle droit.

10. Un angle, tel que ECB, eſt dit *aigu*, lorſque ſes côtés CE, CB, ſont moins ouverts que ceux de l'angle droit.

L'angle obtus ACE, & l'angle aigu ECB ſont toujours formés par une ligne EC qui tombe ſur une autre AB en penchant plus d'un côté que de l'autre.

Fig. 5. 11. On nomme *complément* d'un angle ce qui manque à cet angle pour faire un angle droit, par exemple, comme les deux angles aigus ECB, DCE, compoſant enſemble l'angle droit DCB, ces angles ECB, DCE, ſeront dits *complémens* l'un de l'autre.

12. On nomme *ſupplément* d'un angle, ce qui manque à cet angle, ou ce qu'il faut ajouter à cet angle, pour faire deux angles droits.

ARTICLE VII.

Le plan, la figure, & les différentes ſortes de figures en général.

13. Le *plan* eſt une ſurface indéfinie ſur laquelle une ligne droite peut s'appliquer en tous ſens.

14. La *figure* eſt une ſurface plane terminée de toutes parts par des lignes.

Les lignes qui terminent la figure ſe nomment *côtés* de la figure.

Les côtés de la figure ſont ou tous des lignes droites, ou tous des lignes courbes; ou les uns ſont des

lignes droites, & les autres des lignes courbes. Dans le premier cas la figure eſt dite *rectiligne*; dans le ſecond, *curviligne*; dans le troiſieme, *mixtiligne*.

15. La premiere de toutes les figures rectilignes eſt celle qui eſt terminée par trois côtés; on la nomme *triangle*.

On donne aux autres figures le nom général de poligone, ce qui ſignifie une figure de pluſieurs côtés; on les nomme en particulier *quadrilatere*, *pentagone*, *exagone*, *eptagone*, *octogone*, *ennéagone*, *décagone*, *endécagone*, *dodécagone*, ſelon qu'elles ont 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9, ou 10, ou 11, ou 12 côtés.

ARTICLE VIII.

Les différentes eſpeces de triangles.

16. On diſtingue trois ſortes de triangles, par rapport aux côtés qui les terminent; à ſavoir, l'*équilatéral*, l'*iſoſcele* & le *ſcalene*. *Fig. 6, 7, 8.*

Le premier a ſes trois côtés égaux, tel eſt le triangle ABC, *fig. 6*, en ſuppoſant AB = BC = AC.

Le ſecond, à ſavoir, l'*iſoſcele* a deux côtés égaux, tel eſt le triangle MNO, *figure 7*, en ſuppoſant MN = NO.

Le troiſieme, à ſavoir, le *ſcalene*, a ſes trois côtés inégaux, tel eſt, *fig. 8*, le triangle PQR, dont les trois côtés PQ, QR, PR ſont inégaux.

17. Le triangle, conſidéré par rapport à ſes angles, eſt *rectangle*, ou *obtus-angle*, ou *acutangle*. *Fig. 6, 7, 8.*

Le triangle eſt dit *rectangle*, lorſque l'un de ſes angles eſt droit, tel eſt, *fig. 7*, le triangle MNO, en ſuppoſant l'angle N droit.

Le triangle eſt dit *obtus-angle*, lorſque l'un de ſes angles eſt obtus, tel eſt, *fig. 8*, le triangle PQR, dans lequel l'angle QPR eſt obtus.

Le triangle eſt dit *acutangle*, lorſqu'il a ſes trois angles aigus, tel eſt, *fig. 6*, le triangle ABC.

Fig. 6. 18. Dans tout triangle, on nomme *baſe* le côté quelconque ſur lequel on conçoit que le triangle eſt appuyé, & le *ſommet* du triangle eſt le ſommet de l'angle oppoſé à la baſe. Dans le triangle ABC, par exemple, ſi l'on prend le côté AC pour baſe, le ſommet de l'angle B ſera le ſommet du triangle, & en prenant le côté AB pour baſe, le ſommet du triangle ſera le ſommet de l'angle C, &c.

Fig. 7. Dans le triangle rectangle quelconque MNO, le côté MO oppoſé à l'angle droit N, eſt appellé *hypotenuſe*.

ARTICLE IX.

Les différentes eſpeces de quadrilatere.

Fig. 9, 10, 11, 12, 13 19. Dans tout quadrilatere on nomme *côtés contigus* les deux côtés AB, AD qui forment un même angle quelconque A du quadrilatere.

20. Et l'on appelle *diagonale* une droite DB qui joint les ſommets de deux angles oppoſés quelconques D, B.

21. On nomme en général *parallélogramme*, tout quadrilatere dont les côtés oppoſés ſont égaux.

Fig. 9. On donne auſſi ce nom en particulier au quadrilatere ABCD qui a ſes côtés oppoſés égaux; à ſavoir, AB égal à DC, & AD égal à BC; mais dont les angles ne ſont pas droits.

Fig. 13. 22. Le quadrilatere ABCD qui n'a pas ſes côtés oppoſés égaux, ſe nomme *trapeze*.

Fig. 10. 23. Le quadrilatere ABCD qui a ſes côtés oppoſés égaux, & dont les angles A, B, C, D ſont droits, ſe nomme *rectangle*.

Fig. 11. 24. Le quadrilatere ABCD, dont tous les angles ſont droits, & dans lequel, non ſeulement les côtés

oppoſés, mais encore les côtés contigus ſont égaux, ſe nomme *quarré.*

25. Enfin l'on nomme *rhombe* le quadrilatere ABCD dont tous les côtés ſont égaux, comme dans le quarré, mais dont les angles ne ſont pas droits. *Fig.* 12.

ARTICLE X.

Le poligone régulier & l'irrégulier.

26. Le poligone *régulier* eſt celui dont les côtés ſont égaux de même que les angles. Tel eſt le poligone ABCDEF, en ſuppoſant que ſes côtés AB, BC, CD, &c. ſont égaux entr'eux, & que ſes angles A, B, C, D, &c. ſont auſſi égaux entr'eux. *Fig.* 14.

27. Le poligone *irrégulier* eſt celui qui n'a pas tous ſes angles & tous ſes côtés égaux : tel eſt le poligone ABCDEF. *Fig.* 15.

28. Le *centre* du poligone régulier ABCDEF eſt un point O de ce poligone également éloigné des ſommets de tous les angles de ce poligone. *Fig.* 14.

29. Les *rayons obliques* dans le poligone régulier ABCDEF ſont des droites OA, OB, OC, &c. menées du centre du poligone aux ſommets des angles du même poligone.

30. L'*apotheme*, dans le poligone régulier ABCDEF, eſt la droite OZ menée du centre O du poligone ſur le milieu de l'un quelconque AB des côtés du poligone.

ARTICLE XI.

Le cercle, la circonférence du cercle & ſes parties.

31. Le *cercle* eſt une figure plane que l'on peut concevoir décrite par la révolution d'une ligne droite autour d'une de ſes extrêmités immobile que l'on nomme *centre.*

Par exemple, ſi l'on conçoit que la droite OA fait dans un même plan une révolution entiere ſur ſon
Fig. 16. extrêmité O immobile, la figure plane ABCRDEA qui en réſultera ſera un *cercle*.

Fig. 16. 32. La *circonférence* du cercle eſt la ligne courbe ABCRDE qui renferme le cercle : cette courbe eſt viſiblement la trace de l'extrêmité mobile A de la droite *génératrice* OA.

Une partie quelconque AB de la circonférence ſe nomme *arc*.

La trois cens ſoixantieme partie de la circonférence, ſe nomme *degré*, & s'exprime par *d*, lettre initiale des degrés.

On nomme *minute* la ſoixantieme partie du degré, & on l'exprime par '.

On nomme *ſeconde* la ſoixantieme partie de la minute, & on l'exprime par ", &c.

Selon ces définitions, la circonférence eſt conçue diviſée en 360 parties égales que l'on nomme degrés;
Fig. 16. le degré eſt conçu diviſé en 60 parties égales que l'on nomme minutes, & chaque minute ſe diviſe en 60 ſecondes, &c.

33. On appelle *rayon du cercle* la droite génératrice OA, ou toute autre droite OB, OC, &c. menée du centre du cercle à la circonférence.

34. On nomme *diametre* toute droite, telle que AR menée par le centre O du cercle, & terminée de part & d'autre à la circonférence.

ARTICLE XII.

La Géométrie élémentaire, & la Géométrie compoſée.

35. La Géométrie *élémentaire* ne conſidere que les lignes droites & la circonférence du cercle, les ſurfa-

ces qui ſont engendrées par ces lignes, & les corps formés de ces ſurfaces.

36. La Géométrie *compoſée* examine les différentes courbes, & les corps que ces courbes produiſent.

On conſidérera dans la ſuite toutes les lignes & toutes les figures couchées ſur un même plan, à moins que l'on n'avertiſſe du contraire.

SECTION II.

Propriétés préliminaires.

ARTICLE PREMIER.

Propriétés générales de la ligne droite & de la ligne courbe.

37. *ENTRE deux points* A, B *donnés, on ne peut mener qu'une ſeule ligne droite* AB. Fig. 17.

Car (n°. 5) la ligne droite AB eſt le plus court chemin entre les points A, B : or entre deux points il n'y a qu'un ſeul plus court chemin. (*axiome*).

38. *La poſition d'une ligne droite* AB *eſt toujours déterminée par deux quelconques* A, B *de ſes points.* Fig. 17.

C'eſt-à-dire, que deux points A, B d'une ligne droite AC étant poſés comme l'on voudra, tous les autres points de la droite AB auront la même direction ; ce qui eſt évident : car deux points d'une ligne droite ayant une direction quelconque, ſi les autres points de cette ligne avoient une direction différente, l'enſemble des points de cette ligne ne feroit pas une ligne droite ; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

39. Donc *deux lignes droites ne peuvent pas ſe couper en deux points.*

Car deux points d'interſection ſeroient deux points

communs qui (n°. 38) détermineroient ces deux lignes à la même direction, & dès-lors ces deux lignes droites ne feroient plus qu'une seule & même ligne.

Fig. 17. 40. *Entre deux points donnés* A, B, *on peut mener une infinité de lignes courbes.*

Car un point peut aller de l'endroit A à l'endroit B par des détours ACB, ADB, &c. différens à l'infini.

41. *La position d'une ligne courbe ne dépend donc pas de deux points.*

Puisqu'une infinité de lignes courbes ADB, ACB, &c. peuvent passer par deux mêmes points A, B.

Remarque.

42. De ce que la position d'une ligne droite est déterminée par la position de deux quelconques de ses points, on déduit :

Fig. 17. 1°. *La maniere de tirer sur le papier une droite entre deux points* A, B *donnés.* On applique le côté d'une regle sur ces deux points, & le long de ce côté on fait glisser une plume ou un crayon.

Fig. 18. 2°. *La maniere de tracer sur le terrein entre deux points* A, B *une droite* AB. On plante des piquets à ces deux points A, B, & on leur en aligne d'autres dans leur intervalle.

3°. *Enfin lorsqu'il s'agira dans la suite de donner une certaine position à une ligne droite*, il suffira de trouver deux points qui soient dans cette position.

Article II.

Propriétés générales de la circonférence du cercle.

Fig. 16. De la maniere d'engendrer le cercle (n°. 31) en faisant faire dans un même plan une révolution entiere à une droite AO sur son extrêmité immobile O, on déduira les propriétés suivantes.

43. *La circonférence* ABCRDEA *eſt une ligne courbe qui a tous ſes points à égale diſtance du centre* O *du cercle.*

Puiſque la diſtance de chacun des points de la circonférence au centre O eſt marquée par la même droite génératrice OA.

44. *Les rayons du cercle ſont égaux;* c'eſt-à-dire, que OA = OB = OC, &c. *Fig.* 16.

Puiſque l'on vient de voir que le centre O du cercle eſt à égale diſtance de tous les points de la circonférence, & que l'on a défini (n°. 33) les rayons des droites menées du centre à la circonférence.

45. *Les diametres du cercle ſont auſſi égaux;* c'eſt-à-dire, que AR = BD. *Fig.* 16.

Car les diametres du cercle ſont compoſés chacun de deux rayons (n°. 34). Or on vient de voir que les rayons du cercle ſont égaux.

46. *Le diametre coupe le cercle & la circonférence en deux parties égales;* c'eſt-à-dire, qu'en menant dans le cercle X le diametre AR, on aura l'arc ABCR égal à l'arc AEDR; & la ſurface ABCRA égale à la ſurface AEDRA. *Fig.* 16.

Pour en être convaincu, on conſidérera que lorſque le rayon générateur OA ſe mouvant ſur le centre O parcourt par ſon extrêmité A, l'arc ABCR, pour ſe mettre au point R en ligne droite avec ſa premiere poſition OA, il fait avec ſa premiere poſition OA tous les angles depuis zero juſqu'au plus grand poſſible. *Fig.* 16.

Et lorſque le même rayon générateur quittant la poſition OR, parcourt tous les points de l'arc RDEA, il eſt évident qu'arrivé à ſa premiere poſition OA, il a encore fait avec cette premiere poſition tous les angles depuis le plus grand poſſible juſqu'à zero.

Donc dans chacun de ces deux mouvemens de part

& d'autre du diametre AR, le rayon générateur a fait la moitié de ſa révolution entiere, & par conſéquent dans chacun de ces mouvemens il a décrit des arcs égaux, & des ſurfaces égales.

C'eſt-à-dire, que l'arc ABCR = l'arc AEDR, & la ſurface ABCRA = AEDRA.

REMARQUE.

47. *De la maniere dont on a imaginé que le cercle eſt engendré* (n°. 31), *on déduira la méthode de décrire une circonférence du cercle dont le centre & le rayon ſont donnés :* on ouvrira le compas d'un intervalle égal au rayon donné; on fixera l'une des pointes du compas ſur le centre donné, & l'on fera faire une révolution entiere à l'autre pointe, la trace que laiſſera la pointe mobile ſera une circonférence de cercle.

ARTICLE III.

Propriété générale de l'angle.

48. *Un angle quelconque* ACB *a pour meſure l'arc de cercle compris entre ſes côtés* AC, BC, *& décrit de ſon ſommet* C *comme centre.*

La grandeur de l'angle quelconque ACB dépend de ſon ouverture.

Fig. 19. Pour décider à coup ſûr quelle peut être la meſure de cette ouverture, examinons par quelle ſorte de mouvement elle a pu ſe former; une ligne qui ſeroit produite par ce mouvement qui en marqueroit la qualité & les progrès, ſeroit la meſure naturelle que nous cherchons.

Suppoſons une charniere au ſommet C de l'angle ACB, appliquons le côté CB ſur le côté CA; le côté CA reſtant fixe, relevons le côté CB.

Comme la charniere empêche le côté CB de s'échapper, il ne peut ſe relever qu'en tournant ſur cette charniere; & ſes points N, M, B ne pourront s'éloigner de leurs correſpondans P, O, A du côté CA, que par des lignes tournantes NP, MO, AB, qui ſont évidemment (n°. 31) des arcs de cercle compris entre les côtés de l'angle ACB, & décrits du ſommet C comme centre; il eſt encore viſible que ces lignes ne ceſſant de croître à meſure que le côté CB s'écarte du côté CA, elles deviendront des circonférences entieres, ou des moitiés, ou des quarts, &c. de circonférence, ſelon que le côté CB fera une révolution entiere, ou la moitié, ou le quart, &c. d'une révolution, elles ne ſeront de même que d'un degré, ou de deux degrés, c'eſt-à-dire, d'une ou de deux 360es parties de la circonférence, ſi le côté CB ne fait qu'une ou deux 360es parties d'une révolution entiere.

Donc chacune des lignes tournantes NP, MO, BA eſt formée de l'écartement même des côtés de l'angle ABC; la diſpoſition de ces lignes exprime l'eſpece du mouvement qui écarte ces côtés; le nombre des degrés de ces lignes exprime encore la quantité de cet écartement. *Fig.* 19.

Donc chacune des lignes tournantes NP, MO, BA qui, comme l'on vient de voir, ſont des arcs de cercle décrits entre les côtés de l'angle ACB du ſommet C de cet angle comme centre, eſt la meſure naturelle de l'angle ACB.

Donc en général l'angle a pour meſure l'arc de cercle décrit entre ſes côtés de ſon ſommet comme centre.

49. On conclura de-là, 1°. que *deux angles égaux qui ont leur ſommet au centre d'un même cercle, comprennent entre leurs côtés des arcs égaux.*

Car les arcs de cercle qu'ils comprennent ſont leur meſure (n°. 48) : or des angles égaux ont des meſures égales.

Réciproquement, *lorſque deux angles ayant leur ſommet au centre d'un cercle, comprennent des arcs égaux, ils ſont égaux.*

Car les arcs égaux qu'ils comprennent ſont des meſures égales (n°. 48) : or des angles qui ont des meſures égales ſont égaux.

De deux angles inégaux qui ont leur ſommet au centre d'un même cercle, le plus grand comprend le plus grand arc entre ſes côtés.

Parce que le plus grand angle doit avoir une plus grande meſure.

Réciproquement, *de deux angles qui ayant leur ſommet au centre d'un même cercle, comprennent des arcs inégaux, celui qui comprend le plus grand arc eſt le plus grand.*

Puiſqu'il a une plus grande meſure.

5o. 2°. *L'arc qui meſure l'angle droit eſt le quart de la circonférence ; c'eſt-à-dire, que cet arc eſt de 90 degrés, la circonférence étant toujours ſuppoſée diviſée en 360 degrés* (n°. 32).

Fig. 20.

Pour s'en convaincre, imaginons que ſur une droite AB on a fait tomber une droite CH qui ne penche d'aucun côté ſur AB ; ce qui donnera (n°. 8) les deux angles CHA, CHB droits chacun, & par conſéquent égaux.

Suppoſons encore que du ſommet H commun à ces deux angles droits, comme centre, & avec un rayon quelconque HD, on a décrit ſur AB un arc DEF qui coupe la droite HC.

Parce que les angles AHC, BHC ſont égaux & ont leur ſommet au centre H de l'arc DEF, les arcs DE, EF qu'ils comprennent entre leurs côtés, & qui

qui les mesurent (n°. 48) sont égaux (n°. 49).

Parce que le centre H de l'arc DEF est dans la droite DF, cette droite DF est un diametre (n°. 34), & par conséquent (n°. 46) l'arc DEF, somme des arcs égaux DE, EF, est une demi-circonférence.

Ainsi les deux arcs égaux DE, EF, sont chacun la moitié d'une demi-circonférence, ou le quart de la circonférence.

Donc, l'arc qui mesure l'angle droit quelconque AHC ou BHC, est le quart de la circonférence.

51. *L'angle obtus ayant ses côtés plus ouverts, ou étant plus grand que l'angle droit* (n°. 9), *l'arc qui le mesure est plus grand que le quart de la circonférence* (n°. 49).

Et l'angle aigu étant plus petit que l'angle droit (n°. 10), *l'arc qui le mesure est moindre que le quart de la circonférence.*

REMARQUE.

52. La maniere dont on s'y est pris pour faire voir que la mesure de l'angle est l'arc compris entre ses côtés, & décrit de son sommet comme centre, nous convainc que pour mesurer un angle, il est indifférent de décrire l'arc entre ses côtés avec un rayon plus ou moins grand, c'est-à-dire, plus ou moins près du sommet. *Fig.* 1;

On a vu en effet (n°. 48) que les arcs AB, OM, PN décrits du sommet C entre les côtés CA, CB avec les différens rayons CA, CO, CP, sont des parties semblables de leurs circonférences, & renferment par conséquent des mêmes nombres de degrés.

ARTICLE IV.

Propriétés générales des triangles.

53. *Dans tout triangle* ACB, *la somme de deux* *Fig.* 17

côtés quelconques AC, CB *eſt plus grande que le troiſieme côté* AB.

Car entre les points A, B le chemin le plus court eſt la ligne droite (n°. 5).

Or le troiſieme côté AB du triangle ACB eſt une ligne droite menée entre les points A, B, & les côtés AC, CB pris enſemble, ſont une ligne courbe entre les mêmes points. Donc, &c.

54. *Si d'un point* D, *pris au-dedans du triangle* ACB, *on mene des droites* DA, DB *aux extrêmités de la baſe* AB, *la ſomme* DA + DB *de ces deux droites ſera moindre que la ſomme* AC + CB *des deux autres côtés du triangle.*

Fig. 17. Cette propriété eſt une ſuite néceſſaire de la précédente; car en prolongeant la droite AD juſqu'à ce qu'elle rencontre le côté BC au point E, on aura (n°. 53) . . . $\begin{cases} DE + EB > DB \\ AC + CE > AD + DE. \end{cases}$

Par conſéquent, en ajoûtant enſemble les membres correſpondans de ces inégalités, c'eſt-à-dire, enſemble les premiers membres, & enſemble les ſeconds, on aura (*axiome* 7) DE + EB + AC + CE > DB + AD + DE.

Et en retranchant de chaque membre de cette nouvelle inégalité, la partie commune DE, on aura (*axiome* 6) enfin EB + CE + AC > DB + AD, ou CB + AC > DA + DB.

55. *Lorſque deux triangles* ABC, abc *ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun, le troiſieme côté de l'un eſt égal au troiſieme côté de l'autre.*

Fig. 21. C'eſt-à-dire, que ſi l'angle B = l'angle *b*, & ſi AB = *ab*, & BC = *bc*, on aura AC = *ac*.

Cette vérité eſt une des plus évidentes de la Géométrie; car en ſuppoſant les angles B, *b* égaux & quant à leur ouverture & quant à leurs côtés.

Il eſt viſible qu'à la place de l'un de ces angles on peut prendre l'autre.

Qu'à la place de la diſtance AC des extrêmités des côtés de l'un, on peut prendre la diſtance *ac* des extrêmités des côtés de l'autre; c'eſt-à-dire, que AC $= ac$.

On pourra encore s'aſſûrer de cette vérité, en appliquant ce principe.

Deux droites qui ſe couvrent exactement, c'eſt-à-dire, de façon que l'une ne paſſe pas l'autre, ſont égales.

Soit poſé le ſommet de l'angle *b* ſur le ſommet de l'angle B, de façon que le côté *ab* ſoit couché ſur le côté AB, parce que l'angle *b* eſt ſuppoſé égal à l'angle B, le côté *bc* ſera encore couché ſur le côté BC; & parce que $ba = BA$, & $bc = BC$, il eſt viſible que *ba* couvrira exactement BA, & *bc* couvrira exactement BC; c'eſt-à-dire, que les extrêmités *a* & A, *c* & C ſeront confondues: le troiſieme côté *ac* couvrira donc exactement le troiſieme côté AC, par conſéquent $AC = ac$.

56. *Si dans deux triangles* ABC, abc, *deux angles inégaux* ABC, abc *ſont compris entre des côtés égaux chacun à chacun; à ſavoir*, AB *égal à* ab, *&* BC *égal à* bc, *le côté* ac *oppoſé au plus grand angle* abc *ſera plus grand que le côté* AC *oppoſé au plus petit angle* ABC. Fig. 22.

Puiſque l'on ſuppoſe $AB = ab$, $BC = bc$, il eſt viſible par la propriété précédente (n°. 55), qu'ayant appliqué le ſommet *b* ſur le ſommet B de façon que le côté *ab* ſoit confondu avec ſon égal AB, ſi l'angle *abc* étoit égal à l'angle ABC, *bc* ſe confondroit auſſi avec BC, & *ac* avec AC, ce qui donneroit $ac = AC$; mais parce que l'angle *abc* eſt ſuppoſé plus grand que l'angle ABC, il eſt néceſſaire que lorſque *ba* ſera

confondu avec BA, *bc* tombe au-delà de BC, & comme l'angle *abc* n'a pu être fait plus grand que l'angle ABC, qu'en écartant les côtés *ba*, *bc*, plus que les côtés correſpondans BA, BC, ou, ce qui eſt la même choſe, en éloignant les extrêmités *a* & *c* plus que les extrêmités correſpondantes A, C, il eſt néceſſaire que le côté *ac* oppoſé au plus grand angle *abc* ſoit plus grand que le côté AC oppoſé au plus petit angle ABC.

57. Réciproquement, *deux côtés* AB, BC *d'un triangle* ABC *étant égaux à deux côtés* ab, bc *d'un autre triangle* abc *chacun à chacun; à ſavoir*, AB *égal à* ab, & BC *égal à* bc, *ſi la baſe* AC *du premier triangle eſt plus petite que la baſe* ac *du ſecond, l'angle* abc *oppoſé à la plus grande baſe* ac *ſera plus grand que l'angle* ABC *oppoſé à la moindre baſe* AC. *Fig.* 22.

Parce que l'on ſuppoſe les côtés des angles ABC, *abc* égaux chacun à chacun.

1°. Si l'angle *abc* étoit plus petit que l'angle ABC, on auroit, par la propriété précédente (n°. 56), AC plus grand que *ac*, ce qui eſt contre la ſuppoſition.

2°. Si l'angle *abc* étoit égal à l'angle ABC, on auroit (n°. 55) AC = *ac*, ce qui eſt encore contre la ſuppoſition.

Donc l'angle *abc* oppoſé à la plus grande baſe *ac* ne pouvant être ni plus petit que l'angle ABC oppoſé à la moindre baſe AC, ni égal à cet angle, eſt néceſſairement plus grand. Donc, &c.

58. *Deux triangles* ABC, abc *ſont égaux entiérement; c'eſt-à-dire, égaux dans leurs angles & dans leurs côtés.*

1°. *Lorſque les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre chacun à chacun.* *Fig.* 21.

2°. *Lorſqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun.*

3°. *Lorſqu'ils ont des baſes égales, & que les angles ſur ces baſes ſont égaux chacun à chacun.*

Dans *le premier cas* où l'on ſuppoſe AB = *ab*, BC = *bc*, AC = *ac*, on déduit aiſément de cette ſuppoſition que les angles des triangles ABC, *abc* qui ſont oppoſés aux côtés égaux ſont égaux. *Fig.* 21.

Par exemple, les angles B, *b* oppoſés aux côtés égaux AC, *ac* ſont égaux; car les côtés AB, BC qui forment l'angle B étant égaux aux côtés *ab*, *bc* qui forment l'angle *b*, ſi ces angles étoient inégaux, les côtés AC, *ac* oppoſés à ces angles ſeroient inégaux (n°. 56); ce qui ſeroit contre la ſuppoſition, puiſque AC = *ac*.

On prouvera de même que les angles A & *a* oppoſés aux côtés égaux BC, *bc* ſont égaux, & de même que les angles C & *c* ſont égaux.

Donc lorſque deux triangles ABC, *abc* ont leurs côtés égaux chacun à chacun, les angles de ces triangles ſont égaux chacun à chacun, & par conſéquent ces triangles ſont entiérement égaux.

Dans le ſecond cas où l'on ſuppoſe AB = *ab*, BC = *bc*, & l'angle B = l'angle *b*, on déduit de cette ſuppoſition que le troiſieme côté AC eſt égal au troiſieme côté *ac* (n°. 55). *Fig.* 21.

Par conſéquent les triangles ABC, *abc* ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Or on vient de voir que deux triangles ſont entiérement égaux lorſque les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre.

Donc deux triangles ſont encore entiérement égaux lorſqu'ils ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun.

Dans le troiſieme cas où l'on ſuppoſe deux côtés quelconques AC, *ac* égaux, & les angles compris entre ces côtés égaux chacun à chacun; à ſavoir, l'

Fig. 21. gle *a*, l'angle C = l'angle *c*, il eſt évident qu'en appliquant le côté *a c*, de façon que les extrêmités *a* & *c* tombent ſur les extrêmités A & C; comme l'angle A eſt ſuppoſé égal à l'angle *a*, le côté *a b* tombera ſur le côté AB, & à cauſe de l'égalité des angles C, *c*, le côté *b c* tombera ſur le côté BC.

Ces triangles ABC, *a b c* auront donc entr'eux leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

Par conſéquent (premier cas) deux triangles ſont entiérement égaux lorſqu'ils ont un côté égal, & que les angles adjacens à ce côté égal ſont égaux chacun à chacun.

ARTICLE V.

Propriétés générales des poligones.

Fig. 10, 11, 12. 59. *La diagonale diviſe tout parallélogramme* ABCD, (*c'eſt-à-dire, tout quadrilatere dont les côtés oppoſés ſont égaux*) *en deux triangles* BAD, DCB *entiérement égaux.*

On ſait (n°. 58) que deux triangles ſont entiérement égaux lorſque les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre chacun à chacun.

Or dans les triangles BAD, DCB, on a la diagonale BD qui eſt un côté commun, par conſéquent BD = BD.

Parce que l'on ſuppoſe que les côtés oppoſés du quadrilatere ABCD ſont égaux, on a encore AD=BC, AB = DC.

C'eſt-à-dire, que les triangles BAD, DCB ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Donc ces triangles ſont entiérement égaux. Donc, &c.

60. *Dans le poligone régulier quelconque* ABCDEF,

1°. *Les rayons obliques* OA, OB, OC, &c. *ſont égaux.*

2°. *Ces mêmes rayons obliques ſont ſur les côtés*

AB, BC, CD, &c. *du poligone des triangles* AOB, BOC, COD, &c. *entiérement égaux.* *Fig.* 14.

3°. *Les apothemes* OE, OX, *&c. ſont égaux.*

On ſe rappellera, 1°. (n°. 28) que le centre O du poligone régulier eſt à égale diſtance des ſommets A, B, C, &c. des angles de ce poligone, & l'on conclura que les rayons obliques OA, OB, OC, &c. qui ſont des droites menées du centre O aux ſommets des angles A, B, C, ſont égaux.

On ſe rappellera 2°. (n°. 58) que les triangles ſont entiérement égaux lorſqu'ils ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun; & l'on conclura que les triangles AOB, BOC, COD, &c. faits ſur les côtés AB, BC, CD, &c. du poligone régulier par les rayons obliques OA, OB, OC, &c. ſont entiérement égaux.

Car les côtés du poligone régulier étant égaux (n°. 27), les rayons obliques étant auſſi égaux, comme on vient de le voir, les triangles AOB, BOC, COD, ont viſiblement leurs trois côtés égaux chacun à chacun.

On ſe rappellera 3°. (n°. 30) que les apothemes OZ, OX du poligone régulier ſont des droites menées du centre ſur le milieu des côtés du poligone: ce qui donne AZ = BX, parce que le poligone étant régulier, AB = BC; & l'on conclura que les apothemes OZ, OX ſont égaux.

Car les triangles AOB, BOC, formés par les rayons obliques ſur les côtés AB, BC du poligone étant entiérement égaux, & par conſéquent les angles OAB, OBC oppoſés dans ces triangles aux rayons obliques OB, OC égaux, étant égaux, l'on a dans les triangles OAZ, OBX, l'angle OAZ = l'angle OBX, le côté AO = le côté BO comme rayons obliques, l'on vient de trouver AZ = BX le troiſie-

me côté OZ ſera donc (n°. 55) égal au troiſieme côté OX.

Fig. 15. 61. *Tout poligone* ABCDEF *peut être décompoſé en triangles.*

Car ſi du ſommet de l'un E des angles de ce poligone on tire des droites EA, EB, EC aux ſommets des autres angles auxquels on en peut mener, le poligone ABCDEF ſera décompoſé en différens eſpaces EAF, EBA, ECB, EDC, terminés chacun par trois lignes qui ſont par conſéquent des triangles.

CHAPITRE SECOND.

Les lignes droites conſidérées dans les différentes poſitions qu'elles peuvent avoir entr'elles, & dans le cercle.

La meſure des angles conſidérés dans le cercle, & dans les figures rectilignes.

SECTION PREMIERE.

Les lignes droites conſidérées dans les différentes poſitions qu'elles peuvent avoir entr'elles.

DÉFINITIONS.

LA ligne droite, conſidérée dans ſes différentes poſitions à l'égard d'une autre ligne droite, eſt *perpendiculaire* ou *oblique*, ou *parallele*.

62. Une droite EP eſt dite *perpendiculaire* ſur une autre droite AB, lorſqu'elle tombe ſur cette droite AB ſans pencher d'aucun côté, ou en faiſant avec elle des angles EPA, EPB qui ſont droits chacun. *Fig.* 23.

63. Une droite EP eſt dite *oblique* ſur une autre droite AB, lorſqu'elle fait avec cette autre droite AB deux angles EPA, EPB inégaux. *Fig.* 24.

64. On dit que deux droites AB, CD ſont *paralleles* lorſqu'étant coupées par une droite XZ, elles font ſur cette droite des angles de même ſens XED, XFB égaux. *Fig.* 30.

65. On nomme *angles de ſuite* les deux angles

Fig. 24. EPA, EPB qui fait une droite quelconque EP, en tombant ſur une autre AB.

66. On nomme *angles oppoſés au ſommet*, deux angles ACD, ECB, dont l'un eſt formé par les prolongemens des côtés de l'autre. Fig. 28.

67. On nomme *angles de même côté* les deux angles égaux & de même ſens XED, XFB que forment deux paralleles AB, CD avec la droite XZ qui les coupe; tels ſont auſſi les angles DEZ, BFZ, & les angles CEZ, AFZ, &c. Fig. 30.

68. On nommera *angles alternes* deux angles CEZ, XFB, ou DEF, EFA, faits entre deux paralleles AB, CD par la droite XZ qui coupe ces paralleles l'un d'un côté de cette droite XZ ſur l'une des paralleles, l'autre de l'autre côté de la droite XZ ſur l'autre parallele. Fig. 30.

69. Enfin on appellera *angles internes oppoſés* deux angles DEF, EFB, ou CEF, EFA faits d'un même côté entre deux paralleles AB, CD par la droite XZ qui coupe ces paralleles. Fig. 30.

ARTICLE I.

Les perpendiculaires & les obliques.

Principale propriété de la perpendiculaire.

Fig. 23. 70. PROPOSITION. *Une perpendiculaire* EP *élevée ſur le milieu* P *d'une droite quelconque* AB, *à chacun de ſes points à égale diſtance des extrêmités* A, B *de cette droite* AB.

Enſorte que ſi de l'un quelconque D des points de la perpendiculaire EP, on mene aux extrêmités A, B de la droite AB, les droites DA, DB, on aura DA = DB.

PRÉPARATION.

Comme les diſtances DA, DB ſont des côtés dans les triangles APD, BPD, il eſt viſible que l'on aura démontré DA = DB, en faiſant voir que les angles oppoſés aux côtés DA, DB ſont égaux, & compris entre des côtés égaux chacun à chacun (n°. 55) : or on le déduira aiſément de la condition de la propoſition.

DÉMONSTRATION.

Parce que l'on ſuppoſe EP perpendiculaire ſur AB, les angles APD, BPD ſont droits chacun, & par conſéquent égaux. (n°. 62).

Parce que l'on ſuppoſe que la perpendiculaire EP tombe ſur le milieu P de la droite AB, dans les angles égaux APD, BPD le côté AP eſt égal au côté PB, la perpendiculaire PD eſt de plus un côté commun à ces deux mêmes angles.

Les triangles APD, BPD, ont donc un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun, & par conſéquent les troiſiemes côtés AD, BD ſont égaux.

Mais ces troiſiemes côtés AD, BD ſont les diſtances du point quelconque D de la perpendiculaire EP aux extrêmités A, B de la droite AB, au milieu de laquelle la perpendiculaire EP eſt élevée.

Donc une perpendiculaire élevée ſur le milieu d'une droite à chacun de ſes points à égale diſtance des extrêmités de cette droite; ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION CONVERSE. (*a*)

71. *Lorſqu'une droite* EP *tombe ſur une autre droite*

(*a*) Lorſque dans une propoſition premiérement démontrée, on prend la conſéquence pour la ſuppoſition, & la ſuppoſition

Fig. 23. AB, *ſi tous les points, ou ſeulement deux points* (*b*) *de la premiere ſont à égale diſtance des extrêmités* A, B *de la ſeconde, la premiere droite* EP *ſera perpendiculaire ſur la ſeconde* AB.

DÉMONSTRATION.

En concevant une perpendiculaire élevée ſur la
Fig. 23. droite AB à ſon point P du milieu, cette perpendiculaire aura tous ſes points également éloignés des extrêmités A, B, c'eſt ce que l'on vient de démontrer (n°. 70), cette perpendiculaire aura donc la même poſition que la droite EP, dont on ſuppoſe tous les points également éloignés des extrêmités A, B; cette droite EP ſera donc elle-même perpendiculaire ſur AB; ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE de la propoſition directe.

72. *D'un même point quelconque* P, *pris ſur une*
Fig. 23. *droite* AB, *on ne peut élever ſur cette droite qu'une ſeule perpendiculaire* EP.

Car ſi l'on prend ſur la droite AB deux points quelconques E, F à égale diſtance du point P, toutes les perpendiculaires que l'on pourra ſuppoſer élevées au point P ſur la droite AB, paſſeront (n°. 70) par tous les points à égale diſtance des points E, F; mais ces perpendiculaires, en paſſant ainſi par les mêmes points, ſe confondront & n'en feront qu'une ſeule.

Donc du même point quelconque P, pris ſur une

pour la conſéquence d'une nouvelle propoſition, cette nouvelle propoſition eſt dite *converſe* à l'égard de la premiere, & cette premiere eſt dite *directe* à l'égard de la *converſe*.

(*b*) Tous les points ont ſeulement deux points, parce que comme la poſition d'une ligne droite dépend de deux points (n°. 38), annoncer la direction de deux points, c'eſt annoncer celle de tous.

droite AB, on ne peut élever ſur cette droite qu'une ſeule perpendiculaire.

Principale propriété de l'oblique.

7. PROPOSITION. *Une droite* EP *qui tombe obliquement ſur une droite* AB, *en un point quelconque* P *différent des extrêmités* A, B, *fait avec cette droite deux angles de ſuite* EPA, EPB *qui valent enſemble deux angles droits.* Fig. 24.

PRÉPARATION.

On ſait que deux angles droits ſont meſurés par une demi-circonférence ou 180 d. puiſque l'arc qui meſure l'angle droit eſt le quart de la circonférence (n°. 50).

Ainſi on aura fait voir que les deux angles de ſuite EPA, EPB valent enſemble deux angles droits, ſi on démontre que la ſomme des arcs qui meſurent ces deux angles eſt une demi-circonférence.

DÉMONSTRATION.

Soit décrit ſur la droite AB du ſommet P des deux angles de ſuite comme centre, & avec un rayon quelconque P*a*, un arc *abcd* qui coupe l'oblique PE.

Parce que les angles de ſuite EPA, EPB ont leur ſommet P au centre de l'arc *abcd*, ils ſont meſurés l'un EPA par l'arc *abc*, compris entre ſes côtés; l'autre EPB par l'arc *cd* compris de même entre ſes côtés (n°. 48).

Mais parce que le centre P de l'arc *abcd* eſt ſur la droite AB, *ad* eſt un diametre (n°. 34), & par conſéquent (n°. 46) l'arc *abcd*, ſomme des arcs *abc*, *cd*, eſt une demi-circonférence.

Donc les angles de ſuite EPA, EPB ſont enſemble meſurés par une demi-circonférence, & valent

tes les lignes que l'on pourra mener du point E *à la droite* AB; *par exemple, la perpendiculaire* EC *ſera plus courte que l'oblique quelconque* ED.

2°. *De deux obliques* ED, EB *inégalement éloignées de la perpendiculaire* EC, *celle* EB *qui en eſt la plus éloignée ſera la plus longue.*

3°. *Deux obliques* EA, ED, *également éloignées de la perpendiculaire* EC, *ſeront égales.*

PRÉPARATION.

On va voir que les conditions de la propoſition permettent,

1°. De rendre la perpendiculaire EC la moitié d'une droite, & l'oblique quelconque ED la moitié d'une courbée tirée entre les mêmes points que la droite; ce qui donnera EC < ED.

g. 29. 2°. De rendre les obliques ED, EB inégalement éloignées de la perpendiculaire, les moitiés de deux courbes, la premiere intérieure à la ſeconde, & tirées toutes deux entre des mêmes points; ce qui donnera ED < EB.

3°. De regarder les obliques EA, ED également éloignées de la perpendiculaire comme les troiſiemes côtés de deux triangles ACE, DCE qui ont un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun; ce qui donnera EA = ED.

DÉMONSTRATION.

g. 29. Soit prolongée la perpendiculaire EC en X, de façon que le prolongement CX ſoit égal à cette perpendiculaire EC, & ſoient tirées les droites XA, XD, XB.

Parce que EC eſt perpendiculaire ſur AB, l'angle ECD eſt droit (n°. 62), & ſon angle de ſuite DCX l'eſt auſſi (n°. 73) : ainſi l'angle ECD = DCX.

Mais

Mais les côtés de ces angles ſont auſſi égaux chacun à chacun, car CD eſt un côté commun, & EC = CX par la conſtruction; donc (n°. 55) ED = XD.

On prouvera de même que dans les triangles ECB, BCX, les angles XCB, ECB ſont égaux, & compris entre des côtés égaux chacun à chacun, d'où l'on tirera encore . . . . . EB = XB.

Ainſi de même que l'on a par la conſtruction . . . . . EC = EX,

l'on aura auſſi . . . . $\begin{cases} ED = \frac{ED + DX}{2} \\ EB = \frac{EB + BX}{2}. \end{cases}$

Mais (n°. 53) . . . EX < ED + DX,

& (n°. 54) . . . ED + DX < EB + BX.

Et en prenant les moitiés de ces grandeurs (*axiome* 2) $\frac{EX}{2} < \frac{ED + DX}{2}$, & $\frac{ED + DX}{2} < \frac{EB + BX}{2}$.

Donc EC < ED, ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Et ED < EB, ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Si l'on conſidere à préſent que parce que EC eſt perpendiculaire ſur AB, l'on a dans les triangles ECA, ECD, l'angle ECA égal à l'angle ECD; comme les côtés de ces angles ſont encore égaux chacun à chacun, puiſque EC eſt un côté commun, & que AC = CD en ſuppoſant les obliques EA, ED également éloignées de la perpendiculaire.

On aura encore (n°. 55) . . . . EA = ED.

C'eſt-à-dire, que les obliques également éloignées de la perpendiculaire ſont égales; ce qu'il falloit 3°. démontrer.

CONVERSE.

79. 1°. *Si une droite* EC *eſt la plus courte de toutes les lignes que l'on peut mener du point* E *ſur la droite* AB, *cette droite* EC *eſt néceſſairement perpendiculaire. ſur* AB.

Car ſi cette droite EC étoit oblique, on vient de voir qu'elle ne ſeroit pas la plus courte.

Fig. 29. 2°. *De deux obliques* ED, EB *menées d'un même point* E *à une même droite* AB, *celle* EB *qui eſt la plus longue eſt néceſſairement la plus éloignée de la perpendiculaire* EC *menée du même point* E *ſur la droite*. AB.

Car ſi l'oblique EB n'étoit pas la plus éloignée de la perpendiculaire, on vient de voir qu'elle ne ſeroit pas la plus longue.

3°. *Lorſque deux obliques* EA, ED *menées d'un même point* E *ſur une même droite* AB *ſont égales, ces obliques égales ſont néceſſairement à égale diſtance de la perpendiculaire menée du même point* E *ſur la même droite* AB.

Car on vient de voir que deux obliques inégalement éloignées de la perpendiculaire ſont inégales.

CONSÉQUENCES.

Fig. 29. 80. Premiere. *La perpendiculaire* EC *menée du point* E *ſur la droite* AB, *eſt la diſtance de ce point* E *à cette droite* AB.

Car la diſtance du point E à la droite AB, eſt le plus court chemin de ce point à cette droite : or on a démontré (n°. 78) que la perpendiculaire EC eſt ce plus court chemin.

Fig. 29. 81. Seconde. *D'un point* E *on ne peut mener à une droite* AB *qu'une ſeule perpendiculaire.*

Parce que l'on ne peut imaginer qu'un ſeul plus court chemin du point E à la droite AB (*axiome* 10), & que la perpendiculaire EC eſt ce plus court chemin (n°. 78).

82. Par conſéquent, 1°. *deux perpendiculaires élevées ſur une même ligne droite, ne peuvent ſe rencontrer étant prolongées tant que l'on voudra.*

Car ſi elles ſe rencontroient, on pourroit regarder le point de rencontre comme un point duquel on auroit abaiſſé deux perpendiculaires ſur une même droite; ce qui eſt impoſſible (n°. 81).

83. 2°. *Lorſqu'une perpendiculaire* EP *menée ſur une droite* AB *à un quelconque* D *de ſes points à égale diſtance des extrêmités* A, B *de la droite* AB, *elle a auſſi chacun de ſes autres points à égale diſtance des mêmes extrêmités* A, B. Fig. 23.

Si cela n'étoit pas, on pourroit concevoir une droite différente de EP, menée ſur AB par le point D, & par tous les autres points également diſtans des extrêmités A, B, & comme cette droite ſeroit (n°. 71) perpendiculaire ſur AB, de même que la droite EP, on auroit deux perpendiculaires menées d'un même point D ſur une même droite AB; ce qui eſt impoſſible (n°. 81). Donc, &c.

84. Troiſieme. *D'un point* E, *pris hors d'une ligne droite* AB, *on ne peut mener ſur cette droite trois obliques égales.* Fig. 29.

Car (n°. 79) ces trois obliques égales ſeroient trois obliques également éloignées de la perpendiculaire EC menée du même point E ſur la même droite AB; or il eſt évident que l'on ne peut mener du même point E ſur AB trois obliques également éloignées de la perpendiculaire EC. Donc du point E on ne peut mener ſur AB trois obliques égales.

85. Par conſéquent, 1°. *une ligne droite* AB *ne peut* Fig. 29.

avoir trois points également éloignés d'un même point extérieur E.

Autrement on pourroit du point extérieur E mener ſur la droite AB trois obliques égales ; ce qui eſt impoſſible (n°. 84).

86. 2°. *Une ligne droite ne peut couper une circonférence en trois points.*

Car ces trois points d'interſection ſeroient trois points de la circonférence à égale diſtance du centre de la circonférence ; & dès lors la ligne droite auroit trois points à égale diſtance d'un point extérieur ; ce qui eſt impoſſible (n°. 85).

ARTICLE II.

Propriétés des paralleles coupées par une droite.

87. PROPOSITION. *Lorſque deux paralleles* AB, CD *ſont coupées par une droite* XZ,

fig. 30.

1°. *Les angles alternes* CEF, EFB *ſont égaux.*

2°. *Les angles internes oppoſés* DEF, EFB, *valent enſemble deux angles droits.*

PRÉPARATION.

La droite XZ qui coupe les deux paralleles AB, CD, a ſur chacune de ces paralleles les propriétés d'une droite qui tombe ſur une autre, ou qui en coupe une autre ; elle forme donc ſur chacune de ces paralleles des angles de ſuite égaux enſemble à deux angles droits, & des angles oppoſés au ſommet, toujours égaux ; ces propriétés combinées avec celles qu'ont les paralleles de faire avec la droite qui les coupe des angles de même côté égaux, donneront les égalités que la propoſition renferme.

DÉMONSTRATION.

Parce que les droites AB, CD ſont ſuppoſées pa-

ralleles, les angles de même côté XED, XFB ſont égaux.

Mais, 1°. l'angle XED eſt égal à l'angle CEF ſon oppoſé au ſommet (n°. 77). Donc l'angle CEF eſt égal à XFB.

C'eſt-à-dire, que les angles alternes ſont égaux; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

2°. L'angle XED vaut deux angles droits avec ſon angle de ſuite DEF (n°. 73).

Donc l'angle XFB qui eſt égal à XED (n°. 64), vaudra auſſi deux angles droits avec l'angle DEF.

C'eſt-à-dire, que les angles internes oppoſés valent enſemble deux angles droits; ce qu'il falloit 2°. démontrer.

CONVERSE.

88. *Deux droites* AB, CD *coupées par une troiſieme droite* XZ *ſont paralleles.*

1°. *Si les angles alternes* CEF, EFB *ſont égaux.*

Car l'angle CEF étant égal à ſon oppoſé au ſommet XED (n°. 77), de l'égalité des angles CEF, EFB, on déduira (*axiome* 9) l'égalité des angles de même côté XED, EFB; & cette égalité des angles de même côté fait reconnoître (n°. 64) que les lignes AB, CD ſont paralleles.

2°. *Si les angles internes oppoſés* DEF, EFB *valent enſemble deux angles droits.*

Car parce que l'angle DEF eſt ſuppoſé valoir deux angles droits avec l'angle EFB, & que ce même angle DEF vaut auſſi deux angles droits avec ſon angle de ſuite DEX (n°. 73), il eſt néceſſaire que l'angle EFB ſoit égal à l'angle DEX. Dans cette ſuppoſition les angles de même côté DEX, BFX ſont donc encore égaux.

Par conſéquent (n°. 64) les droites AB, CD

94. Par conſéquent *les paralleles ſont dans toute leur longueur à égale diſtance l'une de l'autre.*

Si cela n'étoit pas, elles ſe rencontreroient étant prolongées.

95. D'où il ſuit que *les perpendiculaires entre deux paralleles ſont égales.*

Puiſque les perpendiculaires mèſurent la diſtance des paralleles qui eſt la même dans toute la longueur de ces lignes (n°. 94).

Les obliques conſidérées entre les paralleles.

Fig. 32. 96. PROPOSITION. *Deux obliques* EF, PQ, *compriſes entre deux paralleles* AB, CD, *ſont égales lorſqu'elles ſont également inclinées ſur ces paralleles.*

PRÉPARATION.

Parce que l'on ſuppoſe les obliques EF, PQ compriſes entre deux paralleles, & également inclinées ſur ces paralleles, il ſera aiſé de faire voir que ces obliques peuvent être conſidérées comme des côtés oppoſés à des angles égaux dans des triangles entiérement égaux; ce qui donnera EF = PQ.

DÉMONSTRATION.

Soient des extrêmités F, Q des obliques EF, PQ abaiſſées les perpendiculaires FH, QR ſur la parallele AB.

Parce que les droites AB, CD ſont paralleles, on aura (n°. 95) FH = QR.

Parce que les droites HF, RQ ſont perpendiculaires ſur AB, & par conſéquent ſur CD (n°. 90), on aura $\left\{ \begin{array}{l} (n°.\ 62) \\ \end{array} \right.$ l'angle EHF = PRQ, l'angle HFC = RQC.

Parce que les obliques EF, PQ ſont également inclinées ſur les paralleles AB, CD, on aura l'angle

EFC = PQC, & retranchant ces angles des angles droits HFC, RQC dont ils ſont partis, on aura (*axiome* 4) l'angle EFH = PQR.

On aura donc dans les triangles EHF, PRQ ſur les côtés égaux HF, QR les angles égaux chacun à chacun, ces triangles ſeront donc (n°. 58) entiérement égaux; & par conſéquent les côtés EF, PQ oppoſés dans ces triangles aux angles égaux EHF, PRQ ſeront égaux. *Fig.* 32.

Mais ces côtés égaux EF, PQ ſont les obliques compriſes entre les paralleles AB, CD, & également inclinées ſur ces paralleles.

Donc les obliques compriſes entre des paralleles, & également inclinées ſur ces paralleles, ſont égales; ce qu'il falloit démontrer.

CONVERSE.

97. *Lorſque les obliques* EF, PQ, *compriſes entre des paralleles* AB, CD *ſont égales, elles ſont également inclinées ſur ces paralleles.* *Fig.* 32.

En effet en abaiſſant des points F, Q les perpendiculaires FH, QR, on aura (n°. 95) FH = QR. Comme l'on ſuppoſe EF = PQ, & que les obliques égales tirées de l'extrêmité d'une même perpendiculaire, ou, ce qui eſt la même choſe, des extrêmités de perpendiculaires égales doivent être également éloignées de ces perpendiculaires (n°. 79), on aura encore EH = PR.

Les triangles EHF, PRQ auront donc leurs trois côtés égaux chacun à chacun; & par conſéquent les angles FEH, QPR oppoſés dans ces triangles aux côtés égaux FH, QR ſeront égaux.

C'eſt-à-dire, que les obliques égales EF, PQ, & compriſes entre les paralleles AB, CD, ſont également inclinées ſur ces paralleles; ce qu'il falloit démontrer.

DÉMONSTRATION.

1°. L'on a AB > AC.

33,34, Car la courbe AOC, compoſée de la partie OA & du rayon OC, eſt évidemment (n°. 53) plus grande que la droite AC; mais la droite AB qui eſt auſſi compoſée de la partie OA & d'un rayon OB, eſt viſiblement égale à la courbe AOC. Donc la droite AB eſt auſſi plus grande que AC.

C'eſt-à-dire, que la droite qui paſſe par le centre eſt plus grande qu'une autre droite quelconque.

2°. L'on a AC > AD.

Car puiſque l'on ſuppoſe que la droite AC comprend avec la droite AB qui paſſe par le centre un arc CB moindre que l'arc DBC compris entre la droite AD & la droite AB, il eſt viſible qu'en retranchant chacun de ces arcs BC, BCD de la demi-circonférence BCDQ, on aura (*axiome* 6) l'arc CDQ > l'arc DRQ; ce qui donnera (n°. 49) l'angle AOC > AOD.

Et comme les côtés de ces angles ſont évidemment égaux chacun à chacun, à ſavoir, AO = AO, & OC = OD, puiſque AO eſt un côté commun, & que OC & OD ſont des rayons de même cercle (n°. 44).

On a (n°. 56) le côté AC oppoſé au plus grand angle AOC, plus grand que AD oppoſé au moindre angle AOD.

C'eſt-à-dire, que de deux droites AC, AD qui comprennent avec la droite AB qui paſſe par le centre des arcs BC, BCD inégaux, celle qui comprend le moindre arc BC eſt la plus longue.

3°. L'on a AC = AE.

Car parce que l'on ſuppoſe que les droites AC, AE comprennent avec la droite AB qui paſſe par le cen-

tre des arcs BC, BE égaux, en retranchant l'arc BC de la demi-circonférence BCQ, & l'arc BE de la demi-circonférence BEQ, on aura (*axiome* 4) l'arc CDQ = EHQ ; ce qui donnera (n°. 49) l'angle COA = EOA.

Les côtés des angles égaux COA, EOA ſont encore évidemment égaux chacun à chacun ; à ſavoir, OA = OA, & OC = OE (n°. 44).

Donc les côtés AC, AE oppoſés aux angles égaux COA, EOA ſont égaux.

C'eſt-à-dire, que deux droites AC, AE qui comprennent avec celle AB qui paſſent par le centre O, des arcs BC, BE égaux, ſont égales.

4°. L'on a AQ < AR.

Si le point A eſt en-dehors du cercle, on ajoutera à la droite AQ le rayon OQ, & à la droite AR le rayon OR, & l'on aura (n°. 53) AQ + QO < AR + RO. *Fig.* 34.

Donc en retranchant du premier membre de cette égalité le rayon OQ, & du ſecond membre le rayon OR, on a (*axiome* 6) AQ < AR.

Si le point A eſt en-dedans du cercle, on ajoutera à chacune des droites AQ, AR, la partie commune OA, comme l'on aura (n°. 53) AR + AO > OR, on conclura parce que (44) OR = OQ, AR + AO > OQ. *Fig.* 35.

Et retranchant de chaque membre de cette derniere inégalité la partie commune OA, on aura enfin (*axiome* 6) AR > AQ, ou AQ < AR.

C'eſt-à-dire, que de toutes les droites que l'on peut mener du point A, celle dont le prolongement paſſe par le centre O du cercle eſt la plus courte.

CONVERSE.

103. 1°. *Si une droite* AB *menée d'un point* A *différent du centre* O *à la circonférence, eſt la plus longue*

la circonférence devroient, pour être égales, comprendre avec la droite AB menée du même point A, & qui paſſe par le centre, trois arcs égaux ; c'eſt-à-dire, que les extrêmités de ces trois droites devroient être également éloignées de l'extrêmité B de la droite AB. Or il eſt évidemment impoſſible que trois droites, menées du même point A à la circonférence, ayent leurs extrêmités également éloignées du même point B.

107. Par conſéquent, 1°. *Trois points* A, D, B *d'une circonférence* X, *dont le centre eſt* C, *ne peuvent* Fig. 36. *être également éloignées du centre* S *d'une autre circonférence* Z.

Autrement on pourroit dans le cercle X, d'un point S différent de ſon centre C, mener trois droites SA, SD, SB égales ; ce qui eſt impoſſible (n°106).

Fig. 36. 108. 2°. *Que trois points* A, D, B *d'une même circonférence* X *qui auroit le point* C *pour centre, ne peuvent être communs à une autre circonférence* Z *qui auroit le point* S *pour centre.*

Car alors (n°. 43) les trois points A, D, B de la circonférence X ſeroient également éloignés du centre S de la circonférence Z ; ce que l'on vient de voir impoſſible.

Fig. 36. 109. 3°. *Deux circonférences* X, Z *ne peuvent ſe couper en trois points.*

Car trois points d'interſection ſeroient trois points communs à ces deux circonférences.

Ainſi, *trois points qui ne ſont pas en ligne droite ſuffiſent pour déterminer une circonférence.*

Fig. 37, 38. 110. Seconde. *Deux circonférences* X & Z *qui ſe touchent, c'eſt-à-dire qui n'ont qu'un point* A *commun, ont leur point* A *d'attouchement, & leurs centres* C, S *en ligne droite.*

Car ſi du centre S du cercle Z on mene au point A d'attouchement

mun.

ı plus courte de toutes les droites SA, SB, me-
à la circonférence X d'un point S différent de
centre C, ſera la droite SA qui joint le centre S
ercle Z avec le point A d'attouchement; par con-
ent (n°. 103) la droite SA prolongée paſſera par
ntre C du cercle X, c'eſt-à-dire, que les centres
des centres X, Z, & leur point A d'attouche-
t ſont en ligne droite.

REMARQUE.

11. Cette conſéquence nous donne la maniere de *Fig. 39, 40.*
ire des arcs qui ſe touchent intérieurement ou ex-
rement.

ır exemple, ayant décrit entre les côtés de l'angle *Fig. 39.*
E l'arc DE, du ſommet C comme centre, ſi
oints F, G, pris ſur les côtés CD, CE, on dé-
avec les rayons FD, GE, les arcs AD, EB, les
arcs AD, DE, EB qui, par la conſtruction,
nt leurs centres & leurs points d'attouchement
gne droite, ſe toucheront intérieurement.

: ſi ayant décrit du point C comme centre, & *Fig. 40.*

ſe toucheront extérieurement, & compoſeron
courbe infléchie ASB.

ARTICLE II.

Propriétés des droites tangentes du cercle.

112. PROPOSITION. *Une droite* AB *étant*
Fig. 41. *gente au point quelconque* T *de la circonférence du*
cle X, *ſi l'on mene à ce point* T *d'attouchemen*
rayon OT, *ce rayon* OT *ſera perpendiculaire ſu*
tangente AB.

PRÉPARATION.

Il ſuffira de faire voir que le rayon OT m
au point d'attouchement, eſt la droite la plus co
de toutes celles que l'on peut mener du centre O
la tangente AB (n°. 79). Or on le déduira aiſém
de la définition de la tangente (n°. 101).

DÉMONSTRATION.

Parce que la droite AB eſt ſuppoſée tangente
point T, le point T eſt le ſeul point commun qu'
ait avec la circonférence du cercle X, tous ſes au
points ſont en-dehors de la circonférence, & ſ
lors plus éloignés que le point T du centre O du
ele; & par conſéquent ſi à un point quelconqu
de la tangente AB, différent du point T d'attouc
ment, on mene une droite OR, cette droite (
ſera plus grande que le rayon OT.

Le rayon OT, mené au point T d'attouchem
eſt donc la droite la plus courte que l'on puiſſe m
du centre O ſur la tangente AB.

Donc (n°. 79) le rayon OT mené au point d
touchement d'une tangente AB, eſt perpendicul
ſur cette tangente; ce qu'il falloit démontrer.

CONVERSE.

113. *Si par le centre* O *d'un cercle* X *on mene une perpendiculaire ſur une tangente* AB *de ce cercle, cette perpendiculaire paſſera néceſſairement par le point* T, *auquel la droite* AB *touche la circonférence.* Fig. 41.

Car on vient de démontrer (n°. 112) que le rayon OT, mené au point T d'attouchement, eſt perpendiculaire ſur la tangente AB; donc ſi la perpendiculaire que l'on ſuppoſe à préſent menée par le centre O ſur la tangente AB n'aboutiſſoit pas au point T d'attouchement, on auroit deux perpendiculaires abaiſſées du même point O ſur la même droite AB : ce qui eſt impoſſible. La perpendiculaire menée par le centre O ſur la tangente AB, paſſera donc par le point d'attouchement.

CONSÉQUENCES de la propoſition directe.

114. Premiere. *La tangente* AB *eſt perpendiculaire ſur le rayon* OT *mené au point* T *d'attouchement.* Fig. 41.

Car le rayon OT, mené au point T d'attouchement, étant (comme on vient de le voir n°. 112) perpendiculaire ſur la tangente AB, cette tangente AB fait un angle droit OTA ou OTB avec le rayon OT (n°. 62), & lui eſt par conſéquent perpendiculaire.

115. *Et réciproquement, lorſqu'une droite* AB *eſt perpendiculaire ſur un rayon* OT *à ſon extrêmité* T, *cette droite* AB *eſt tangente au point* T. Fig. 41.

Car dans cette ſuppoſition le rayon OT ſera réciproquement perpendiculaire ſur la droite AB, & ſera dès-lors le plus court chemin du centre O à cette droite (n°. 80). Cette droite AB ſera donc toute en-dehors de la circonférence, excepté au point T auquel le rayon OT aboutit; cette droite AB ne touchant ainſi la circonférence que dans le ſeul point T,

ſera par conſéquent tangente (n°. 101) au point T.

116. Seconde. *On ne peut mener qu'une ſeule tangente à un point* T *quelconque d'une circonférence.*

Fig. 42. On ſait en effet qu'en menant au point T un rayon OT, la droite qui ſera tangente au point T ſera perpendiculaire ſur le rayon OT (n°. 114); mais on ne peut au point T mener ſur le rayon OT qu'une ſeule perpendiculaire AB (n°. 72). Donc de même on ne peut mener au point T qu'une ſeule tangente.

117. Troiſieme. *Une perpendiculaire* TX *élevée ſur une tangente* AB *au point* T *d'attouchement, & en-dedans du cercle, paſſe par le centre* O.

Car le rayon OT mené au point T d'attouchement, eſt perpendiculaire ſur la tangente AB (n°. 112); ainſi ſi la perpendiculaire TX élevée ſur la tangente AB au point T d'attouchement ne paſſoit pas par le centre O, on pourroit élever ſur une droite AB d'un même point T, deux perpendiculaires : ce qui eſt impoſſible (n°. 72).

ARTICLE III.

Propriétés des perpendiculaires & des paralleles conſidérées dans le cercle.

118. PROPOSITION. *Lorſqu'une droite* XQ, *conſidéré daus le cercle, aura deux des quatre conditions ſuivantes; ſavoir,*

Etre perpendiculaire à la corde AB.

Paſſer par le centre O.

Paſſer par le milieu P *de la corde* AB.

Paſſer par le milieu Q *de l'arc* AQB *ſoutenu par la corde* AB.

Fig. 42. *Elle aura néceſſairement les deux autres; c'eſt-à-dire que,*

1°. Si la droite XQ eſt perpendiculaire à la corde

AB, & diviſe cette corde en deux également, elle paſſera par le centre O, & diviſera l'arc AQB en deux parties égales.

2°. Si la droite XQ eſt perpendiculaire ſur la corde AB, & diviſe ſon arc AQB en deux également, elle paſſera par le centre O, & par le milieu P de la corde AB. *Fig. 42.*

3°. Si la droite XQ eſt perpendiculaire ſur la corde AB, & paſſe par le centre O, elle diviſera la corde AB & ſon arc AQB en deux également.

4°. Si la droite XQ paſſe par le centre O, & par le milieu P de la corde AB, elle ſera perpendiculaire ſur la corde AB, & diviſera en deux également l'arc AQB.

5°. Si la droite XQ paſſe par le centre O, & par le milieu Q de l'arc AQB, elle ſera perpendiculaire ſur la corde AB, & la diviſera en deux également.

6°. Si la droite XQ paſſe par le milieu P de la corde AB, & par le milieu Q de l'arc AQB, elle paſſera par le centre O, & ſera perpendiculaire ſur la corde AB.

PRÉPARATION.

Cette propoſition n'eſt que le réſultat des propriétés les plus ſimples du cercle, combinées avec les propriétés de la perpendiculaire.

DÉMONSTRATION.

Le centre O du cercle eſt un point également éloigné des extrêmités AB de la corde AB (n°. 43), le milieu P de la corde AB eſt auſſi évidemment un point également éloigné des extrêmités A, B de cette corde; on ſait encore (n°. 105) que le milieu Q de l'arc AQB eſt également diſtant des extrêmités A, B de l'arc AQB, ou de la corde AB. *Fig. 42.*

Mais, 1°. (n°. 83) lorſqu'une droite eſt perpendiculaire ſur une autre droite, & qu'elle a un de ſes points à égale diſtance des extrêmités de cette autre droite, elle paſſe par tous les autres points également diſtans des mêmes extrêmités.

Fig. 42. Donc ſi la droite TX eſt perpendiculaire ſur la corde AB, & diviſe cette corde en deux également, elle paſſera par le centre O & par le milieu Q de l'arc AQB ſoutenu par cette corde.

Si la droite TX eſt perpendiculaire ſur la corde AB, & diviſe ſon arc AQB en deux également, elle paſſera par le centre O & par le milieu P de la corde AB.

Si la droite TX eſt perpendiculaire ſur la corde AB, & paſſe par le centre O, elle diviſera en deux également la corde AB & ſon arc AQB.

Ce qu'il falloit 1°. 2°. & 3°. démontrer.

Mais, 2°. lorſqu'une droite eſt élevée ſur une autre droite, de façon qu'elle ait deux points à égale diſtance des extrêmités de cette autre droite; la premiere eſt perpendiculaire à la ſeconde (n°. 71), & paſſe par tous les points également diſtans des extrêmités de cette ſeconde (n°. 70).

Donc ſi la droite TX paſſe par le centre O & par le milieu P de la corde AB, elle ſera perpendiculaire ſur la corde AB, & diviſera ſon arc AQB en deux également.

Si la droite TX paſſe par le centre O & par le milieu Q de l'arc AQB, elle ſera perpendiculaire ſur la corde AB, & coupera cette corde en deux également au point P.

Si la droite TX diviſe la corde AB & ſon arc AQB en deux également, elle ſera perpendiculaire ſur la corde AB, & paſſera par le centre O.

Ce qu'il falloit 4°. 5°. & 6°. démontrer.

CONSÉQUENCES.

119. Premiere. *Lorſque deux cordes* AB, CD *ſont paralleles, les arcs* AC, BD *qu'elles comprennent ſont égaux.*

Car, parce que les cordes AB, CD ſont paralleles, ſi par le centre O on mene ſur l'une CD de ces cordes la perpendiculaire XQ, elle ſera en même tems perpendiculaire ſur AB (n°. 90); par conſéquent en prolongeant cette perpendiculaire XQ juſqu'à la circonférence en R, le point R ſera, comme on vient de démontrer (n°. 118), en même tems le milieu de l'arc ARB ſoutenu par AB, & celui de l'arc CRD ſoutenu par CD. *Fig.* 43.

C'eſt-à-dire, que l'on aura $\begin{cases} \text{l'arc ACR} = \text{BDR}, \\ \text{l'arc CR} = \text{DR}. \end{cases}$

Par conſéquent (*axiome* 4), l'arc ACR — CR = l'arc BDR — DR, ou l'arc AC = l'arc BD.

120. *Réciproquement, lorſque deux arcs* AC, BD *compris entre deux cordes* AB, CD *qui ne ſe coupent pas, ſont égaux, ces deux cordes ſont paralleles.* *Fig.* 43.

Car, parce que les deux arcs AC, BD ſont égaux, le milieu R de l'arc CRD ſoutenu par la corde CD, ſera en même tems le milieu de l'arc ARB ſoutenu par la corde AB; donc, puiſqu'une droite menée par le centre & par le milieu d'un arc eſt perpendiculaire à la corde qui ſoutient cet arc (n°. 118), ſi l'on mene au point R le rayon OR, ce rayon ſera perpendiculaire aux deux cordes AB, CD; & par conſéquent (n°. 91) ces deux cordes ſont paralleles.

121. Seconde. *Lorſqu'une corde* AB *eſt parallele à une tangente* CD, *les arcs* AQ, BQ *compris entre la corde & le point d'attouchement de la tangente ſont égaux.* *Fig.* 44.

Car, la corde AB & la tangente CD étant paralle-

les, ſi l'on mene au point Q d'attouchement le rayon OQ, ce rayon qui ſera (n°. 112) perpendiculaire ſur la tangente CD, ſera auſſi perpendiculaire ſur la corde AB (n°. 90); mais (n°. 118) une droite qui paſſe par le centre, & qui eſt perpendiculaire à une corde, diviſe en deux également l'arc ſoutenu par cette corde. Donc l'arc AQB eſt diviſé en deux parties égales par le rayon OQ que l'on a mené au point d'attouchement, ou par le point Q d'attouchement; & par conſéquent les arcs compris entre une tangente & une corde paralleles ſont égaux.

Fig. 44. 122. Réciproquement, *lorſque deux arcs* AQ, BQ *compris entre une corde* AB *& le point* Q *d'attouchement d'une tangente* CD *ſont égaux, cette corde* AB *& cette tangente ſont paralleles.*

Car puiſque l'arc AQ = l'arc BQ, le point Q d'attouchement ſera le milieu de l'arc AQB ſoutenu par la corde AB; & par conſéquent (n°. 118) en menant le rayon OQ au point d'attouchement, ce rayon qui eſt perpendiculaire (n°. 112) à la tangente CD, ſera auſſi perpendiculaire à la corde AB. La tangente CD & la corde AB ſeront donc perpendiculaires à une même droite, & par conſéquent (n°. 91) paralleles.

SECTION III.

La meſure des angles conſidérés dans le cercle, & dans les figures rectilignes.

ARTICLE PREMIER.

La meſure des angles conſidérés dans le cercle.

DÉFINITIONS.

123. L'ANGLE conſidéré dans le cercle peut avoir quatre poſitions différentes.

1°. Il peut avoir ſon ſommet au centre du cercle : la meſure de cet angle eſt déja connue (n°. 48).

2°. Il peut avoir ſon ſommet ſur la circonférence du cercle ; & alors il eſt formé ou par deux cordes AB, BD tirées d'un même point B de la circonférence, comme l'angle ABD. *Fig.* 45, 46, 47.

Ou par une tangente BD & une corde BA menée du point B d'attouchement, comme l'angle ABD. *Fig.* 51.

Ou par une corde BA & le prolongement BD d'une autre corde BF menée du même point B, comme l'angle ABD. *Fig.* 53.

3°. L'angle, par exemple ABD, (*Fig.* 54) peut avoir ſon ſommet entre le centre O du cercle & la circonférence ; & alors il eſt formé par deux cordes AD, ED qui s'entrecoupent dans le cercle.

4°. L'angle peut avoir ſon ſommet en-dehors du cercle ; & alors il eſt formé ou par deux ſécantes AB, BD menées d'un même point B pris hors du cercle. *Fig.* 55.

Ou par une ſécante BD & une tangente AB, menées d'un même point B. *Fig.* 56.

l'un des côtés paſſe par le centre, a pour meſure la moitié de l'arc AD compris entre ſes côtés.

Comme l'on eſt prévenu que lorſque le ſommet de l'angle eſt au centre du cercle, la meſure de l'angle eſt l'arc entier compris entre ſes côtés, il eſt évident qu'un moyen bien ſimple de démontrer que l'angle à la circonférence dont l'un des côtés paſſe par le centre, a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, c'eſt de ramener cet angle au centre du cercle, pour comparer l'arc qu'il comprend alors avec celui qu'il comprend lorſque ſon ſommet eſt à la circonférence.

Et comme l'on ſait que les paralleles ont la propriété de faire des angles égaux, & de comprendre dans le cercle des arcs égaux, on voit encore que l'on peut employer les paralleles, & pour ramener au centre l'angle à la circonférence, & pour faire la comparaiſon des arcs.

DÉMONSTRATION.

Fig. 45. Soit tirée par le centre C une droite PQ parallele au côté BD qui ne paſſe pas par le centre.

A cauſe des paralleles PQ, BD, les angles de même côté ABD à la circonférence, & ACQ au centre ſont égaux (n°. 64); par conſéquent l'angle ACQ au centre ayant pour meſure l'arc AQ compris entre ſes côtés, l'angle ABD à la circonférence aura auſſi pour meſure l'arc AQ.

Mais parce que les angles ACQ & PCB ont leur ſommet au centre C, & ſont égaux comme oppoſés au ſommet (n°. 77), les arcs qui les meſurent ſont égaux (n°. 40); c'eſt-à-dire que l'arc AQ = l'arc PB; à cauſe des paralleles PQ, BD, l'arc PB = l'arc QD (n°. 119). Donc l'arc AQ = l'arc QD (*axiome* 9); & par conſéquent l'arc AQ eſt la moitié de l'arc AQD.

Donc l'angle ABD qui eſt meſuré par l'arc AQ, a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés.

Et comme l'on a vu que les cas repréſentés par les figures 46 & 47 ſont des ſuites néceſſaires du cas repréſenté par la figure 45 que l'on vient de démontrer, on conclura généralement que l'angle à la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés; ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

128. Premiere. *L'angle* ACD *qui a ſon ſommet au centre du cercle eſt double de l'angle* ABD *à la circonférence, appuyé ſur le même arc* AD. *Fig. 48.*

Puiſque la meſure du premier eſt l'arc entier AD (n°. 48), & la meſure du ſecond eſt la moitié de l'arc AD (n°. 127).

129. Seconde. *Les angles* ABE, ACE, ADE *à la circonférence, appuyés ſur le même arc* AE *ſont égaux. Il eſt auſſi évident que les angles à la circonférence, appuyés ſur des arcs égaux, ſont égaux.* *Fig. 49.*

Que les angles à la circonférence, appuyés ſur des arcs inégaux, ſont inégaux; c'eſt-à-dire, que celui qui comprendra un plus grand arc ſera le plus grand, & celui qui comprendra un plus petit arc ſera plus petit.

130. Réciproquement, 1°. *les angles à la circonférence qui ſont égaux, comprennent entre leurs côtés des arcs égaux.*

Puiſque l'on vient de voir que les angles à la circonférence qui comprennent deux arcs inégaux ſont inégaux.

2°. *Les angles à la circonférence qui ſont inégaux, comprennent entre leurs côtés des arcs inégaux;* enſorte que le plus grand angle comprend le plus grand arc, & le plus petit angle comprend le plus petit arc.

aura auſſi pour meſure la moitié de l'arc AHB compris entre ſes côtés.

Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Fig. 45. 2°. *L'angle* ABD *dont le ſommet* B *eſt entre le centre* C *& la circonférence, a pour meſure la moitié de l'arc* AD *compris entre ſes côtés, plus la moitié de l'arc* ED *compris entre les prolongemens de ſes côtés au-delà du ſommet* B.

Par le point P auquel le côté AB prolongé au-delà du ſommet B rencontre la circonférence, ſoit tirée la droite PQ parallele à l'autre côté BD.

On aura 1°. les angles de même côté ABD, APQ qui ſont égaux (n°. 64); par conſéquent l'angle APQ à la circonférence ayant pour meſure (n°. 127) la moitié de l'arc ADQ compris entre ſes côtés; c'eſt-à-dire, l'arc $\frac{AD}{2}$ + l'arc $\frac{DQ}{2}$; l'angle ABD aura auſſi pour meſure l'arc $\frac{AD}{2}$ + l'arc $\frac{DQ}{2}$.

On aura 2°. (n°. 119) l'arc $\frac{DQ}{2}$ = l'arc $\frac{EP}{2}$, & par conſéquent l'arc $\frac{DQ}{2}$ = l'arc $\frac{EP}{2}$.

Donc l'angle ABD dont le ſommet eſt entre le centre & la circonférence ayant pour meſure l'arc $\frac{AD}{2}$ + l'arc $\frac{DQ}{2}$, comme on vient de le voir, il aura auſſi pour meſure l'arc $\frac{AD}{2}$ + l'arc $\frac{EP}{2}$; c'eſt-à-dire, la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, plus la moitié de l'arc compris entre les prolongemens de ſes côtés; ce qu'il falloit 2°. démontrer.

Fig. 55, 56, 57. 3°. *Tout angle* ABD *dont le ſommet eſt en-dehors du cercle, a pour meſure la moitié de la différence des arcs concave & convexe compris entre ſes côtés.*

Par le point P auquel l'un AB des côtés rencontre la

la circonférence, ſoit tirée la droite PQ parallele à l'autre côté BD

1°. On aura les angles APQ, ABD de même côté, qui ſont égaux (n°. 64) ; ainſi l'angle APQ ayant pour meſure la moitié de l'arc compris entre AP & PQ (n°. 127, 132, *premiere partie*), l'angle ABD aura auſſi pour meſure la moitié de l'arc compris entre AP & PQ.

2°. (n°. 119, 121) Les arcs compris entre les paralleles BD, PQ ſeront égaux ; par conſéquent l'arc compris entre AP & PQ eſt la différence de l'arc concave AQD (*Fig.* 55), ou PQD (*Fig.* 56), ou PQC (*Fig.* 57) ſur l'arc convexe PC.

Donc l'angle ABD dont le ſommet eſt en-dehors du cercle ayant, comme on vient de le voir, pour meſure la moitié de l'arc compris entre AP & PQ, il a dès-lors pour meſure la moitié de la différence des arcs compris entre ſes côtés ; ce qu'il falloit 3°. démontrer.

CONSÉQUENCE.

De ce que l'angle du ſegment a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés, de même que l'angle à la circonférence :

133. On conclura 1°. *que l'angle* ABD *de l'un des deux ſegmens d'un cercle, eſt égal à l'angle quelconque* ACD *fait dans l'autre ſegment* Z. *Fig.* 52

Puiſque (n°. 127, 132) chacun de ces deux angles a pour meſure la moitié du même arc AHB.

134. 2°. *L'angle* ABD *formé par une corde* AB, *& par le prolongement* BD *d'une autre corde* BF *menée du même point* B *que la corde* AB, *a pour meſure la moitié des arcs* BHA, BEF *ſoutenus par ces deux cordes.* *Fig.* 53

Car en menant par le ſommet B une tangente XZ

à la circonférence, on aura deux angles de ſegmens l'un ABZ dont la meſure eſt l'arc $\frac{AHB}{2}$, l'autre FBX qui eſt égal à DBZ (n°. 77), & dont la meſure eſt l'arc $\frac{BEF}{2}$ (n°. 132).

Donc l'angle ABD qui eſt la ſomme des angles ABZ & DBZ, a pour meſure l'arc $\frac{AHB}{2}$ + l'arc $\frac{BEF}{2}$.

ARTICLE II.

Les angles conſidérés dans les figures rectilignes.

DÉFINITIONS.

Fig. 64. 135. Dans le poligone régulier quelconque ABCDEF, on nomme *angle du centre* l'angle AOB formé par deux rayons obliques AO, OB menées aux extrémités d'un même côté quelconque AB; & l'on appelle *angle à la baſe*, l'angle OAB formé ſur le côté quelconque AB du poligone par le rayon oblique OA mené à l'extrêmité de ce côté.

63, 64. Dans un poligone quelconque, régulier ou irrégulier, on nomme *angle du poligone*, l'angle quelconque ABC formé par deux côtés du poligone; & l'angle de ſuite CBG de l'angle ABC du poligone eſt dit *angle extérieur*.

ig. 64. 136. On dit qu'une figure *eſt inſcrite* dans un cercle, lorſque tous les ſommets des angles de cette figure ſont ſur la circonférence de ce cercle.

ig. 75. 137. Et une figure eſt dite *circonſcrite* à un cercle, lorſque tous les côtés de cette figure ſont des tangentes de la circonférence de ce cercle.

Les Angles du Triangle.

PROPOSITION I.

138. *Les trois angles de tout triangle* ABC *valent enſemble deux angles droits.*

PRÉPARATION.

Il n'y a que la comparaiſon qui augmente nos connoiſſances ; ainſi, ayant à déterminer la valeur des trois angles du triangle, on doit les comparer à d'autres angles dont la ſomme toujours conſtante ſoit déja connue, tels que ſont les angles faits par des paralleles. Le moyen de faire cette comparaiſon, c'eſt d'imaginer au ſommet B du triangle ABC une droite PQ parallele au côté oppoſé AC. *Fig. 58*

Et comme la circonférence eſt la meſure des angles, on pourra auſſi lui rapporter les angles du triangle ABC, en imaginant qu'une circonférence DEF paſſe par les ſommets de ſes trois angles A, B, C ; ce qui eſt toujours poſſible, puiſque (n°. 109) trois points qui ne ſont pas en ligne droite peuvent toujours être regardés comme trois points d'une circonférence déterminée. *Fig. 59.*

DÉMONSTRATION.

En menant par le ſommet B du triangle ABC la droite PQ parallele à la baſe AC, on a les angles internes oppoſés A & ABQ, qui enſemble valent deux angles droits (n°. 87). *Fig. 58.*

Mais l'angle ABQ eſt compoſé de deux parties, l'une ABC qui eſt un angle du triangle ABC, l'autre CBQ qui eſt égale au troiſieme angle ACB du triangle, parce que les angles CBQ & ACB ſont des angles alternes, à cauſe de la droite PQ parallele

à AC (n°. 68), & que l'on ſait (n°. 87) que les angles alternes ſont égaux.

Donc l'angle A vaut auſſi deux angles droits avec la ſomme des angles ABC, BCA.

C'eſt-à-dire, que les trois angles du triangle quelconque ABC, valent enſemble deux angles droits.

AUTRE DÉMONSTRATION.

En imaginant les ſommets des angles du triangle
59. ABC dans une circonférence DEF, chaque angle du triangle ABC devient angle à la circonférence, & a par conſéquent pour meſure la moitié de l'arc que ſes côtés embraſſent (n°. 127).

Mais il eſt évident que les trois angles A, B, C embraſſent enſemble la circonférence entiere DEF.

Donc les trois angles du triangle quelconque ABC ont enſemble pour meſure la moitié de la circonférence, ou 180 degrés, & par conſéquent (n°. 50) valent autant que deux angles droits; ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

139. Premiere. *Lorſqu'un triangle aura un angle droit, ſes deux autres angles vaudront enſemble un angle droit, & ſeront par conſéquent aigus.*

Et lorſqu'un triangle aura un angle obtus, ſes deux autres angles vaudront enſemble moins qu'un angle droit, & ſeront par conſéquent aigus.

140. D'où il ſuit, *qu'un triangle ne peut avoir deux angles qui ſoient droits chacun, ou qui ſoient obtus chacun, ou dont l'un ſoit droit, & l'autre obtus; mais il peut avoir tous ſes angles aigus.*

ig. 58. 141. Seconde. *L'angle de ſuite* BCD *de l'un quelconque* BCA *des trois angles du triangle* ABC, *eſt*

égale à la ſomme des deux autres angles BAC, ABC *de ce triangle.*

Car on vient de voir que l'angle BCA vaut deux angles droits avec la ſomme des deux autres angles BAC, ABC (n°. 138).

Le même angle BCA vaut auſſi deux angles droits avec ſon angle de ſuite BCD (n°. 73).

Donc l'angle BCD vaut autant lui ſeul que les deux angles BAC, ABC pris enſemble.

C'eſt-à-dire, que l'angle de ſuite de l'un quelconque des trois angles du triangle eſt égal à la ſomme des deux autres angles de ce triangle.

On énonce encore cette propriété de cette ſorte : *L'angle extérieur* BCD *du triangle eſt égal à la ſomme des deux intérieurs oppoſés* BAC, ABC.

142. Troiſieme. *Si des trois angles d'un triangle quelconque deux ſont déterminés, le troiſieme le ſera auſſi.*

Puiſque la valeur du troiſieme angle ſera ce qu'il faudra ajouter à la ſomme des deux angles connus, pour faire deux angles droits.

On connoîtra par conſéquent la valeur de ce troiſieme angle, en retranchant de 180. degrés (meſure de deux angles droits) le nombre des degrés que valent enſemble les deux autres.

143. Quatrieme. Puiſque les trois angles de tout triangle valent enſemble deux angles droits, *la ſomme de trois angles d'un triangle eſt égale à la ſomme des trois angles d'un autre triangle.*

144. Par conſéquent, *lorſque deux angles d'un triangle ſeront égaux à deux angles d'un autre triangle pris enſemble, ou chacun à chacun ; le troiſieme angle du premier triangle, & le troiſieme angle du ſecond triangle ſeront encore égaux.*

PROPOSITION II.

145. *Dans un triangle* ABC *quelconque*,

59, 60. 1°. *Lorſque des angles ſont égaux, les côtés oppoſés à ces angles égaux ſont égaux.*

2°. *Réciproquement, lorſque des côtés ſont égaux, les angles oppoſés à ces côtés égaux ſont égaux.*

3°. *Lorſque des angles ſont inégaux, le côté oppoſé au plus grand angle eſt le plus grand.*

4°. *Réciproquement, lorſque des côtés ſont inégaux, l'angle oppoſé au plus grand côté eſt le plus grand.*

PRÉPARATION.

On imaginera le triangle ABC inſcrit dans un cercle, & alors la propoſition ne ſera qu'une conſéquence de ce que l'on a démontré touchant les angles à la circonférence égaux ou inégaux, & touchant les cordes d'un même cercle.

DÉMONSTRATION.

Lorſque le triangle ABC eſt inſcrit dans une circonférence DFE,

Il eſt évident, 1°. qu'en ſuppoſant l'angle A = l'angle C; comme (n°. 130) les angles à la circonférence qui ſont égaux ſont appuyés ſur des arcs égaux, l'on aura l'arc BEC = l'arc BDA; & comme (n°. 104) les arcs égaux ſont ſoutenus par des cordes égales, on
fig. 59. conclura le côté BC = le côté AB.

C'eſt-à-dire, que les côtés oppoſés aux angles égaux ſont égaux; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Réciproquement, 2°. en ſuppoſant le côté BC = le côté AB; comme (n°. 104) les cordes égales ſoutiennent des arcs égaux, on aura l'arc BEC = l'arc BDA; ce qui donne l'angle A = l'angle C, parce que les

angles à la circonférence, appuyés ſur des arcs égaux, ſont égaux (n°. 129).

Ainſi les angles oppoſés aux côtés égaux ſont égaux; ce qu'il falloit 2°. démontrer.

3°. En ſuppoſant l'angle C > l'angle A; comme (n°. 130) de deux angles à la circonférence inégaux, le plus grand eſt appuyé ſur le plus grand arc, on aura l'arc BDA > l'arc BEC.

D'où l'on déduira le côté BA > BC, parce que le plus grand arc eſt ſoutenu par la plus grande corde (n°. 104). *Fig. 60.*

Ainſi le plus grand côté eſt oppoſé au plus grand angle; ce qu'il falloit 3°. démontrer.

4°. En ſuppoſant le côté AB > BC; comme la plus grande corde ſoutient le plus grand arc (n°. 104), on aura l'arc BDA > l'arc BEC; & comme l'angle à la circonférence, appuyé ſur le plus grand arc, eſt le plus grand (n°. 129), on conclura l'angle C > A. *Fig. 60.*

C'eſt-à-dire, que l'angle oppoſé au plus grand côté eſt le plus grand; ce qu'il falloit 4°. démontrer.

CONSÉQUENCE.

146. *Lorſqu'un triangle aura ſes trois angles égaux, ſes trois côtés ſeront égaux; c'eſt-à-dire, qu'il ſera équilatéral.*

Et réciproquement, *le triangle équilatéral a ſes trois angles égaux.*

147. *Lorſqu'un triangle aura deux angles égaux, il aura deux côtés égaux; c'eſt-à-dire, qu'il ſera iſoſcele.*

Réciproquement, *le triangle iſoſcele a deux angles égaux.*

148. *Lorſqu'un triangle aura tous ſes angles inégaux, ſes trois côtés ſeront auſſi inégaux; c'eſt-à-dire, qu'il ſera ſcalene.*

Et réciproquement, *le triangle ſcalene a tous ſes angles inégaux.*

Les Angles du Quadrilatere.

61, 62. 149. PROPOSITION. *Les quatre angles de tout quadrilatere* ABCD, *valent enſemble quatre angles droits.*

Fig. 62. *Dans le parallélogramme* ABCD, *les deux angles adjacens à chacun des côtés, valent enſemble deux angles droits.*

PRÉPARATION.

Tout quadrilatere peut ſe décompoſer en triangles c'eſt donc de la valeur des trois angles du triangle que l'on doit conclure la valeur des angles du quadrilatere.

Et comme l'on ſait (n°. 89) que les côtés oppoſés du parallélogramme ſont paralleles, il eſt encore évident que c'eſt dans les propriétés des paralleles que l'on doit chercher la valeur des deux angles adjacens à chaque côté du parallélogramme.

DÉMONSTRATION.

61, 62. 1°. En menant dans tout quadrilatere ABCD une diagonale BD, il réſulte deux triangles ABD, BCD dont les angles ſont préciſément formés de ceux du quadrilatere ABCD.

Mais les angles de deux triangles valent enſemble quatre angles droits, puiſque (n°. 138) les angles de chaque triangle valent enſemble deux angles droits.

Donc les angles du quadrilatere quelconque ABCD valent auſſi enſemble quatre angles droits; ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Fig. 62. 2°. Parce que (n°. 69) les côtés oppoſés du paral

lélogramme ſont paralleles, les deux angles adjacens à chacun de ces côtés, par exemple les angles A & ADC adjacens au côté AD, ſont des angles internes oppoſés, faits entre paralleles. Or on ſait (n°. 87) que les angles internes oppoſés valent enſemble deux angles droits.

Donc, dans le parallélogramme, les angles adjacens à chacun des côtés valent enſemble deux angles droits; ce qu'il falloit 2°. démontrer.

CONSÉQUENCES.

150. Premiere. *Dans le parallélogramme quelconque* ABCD *les angles oppoſés ſont égaux ;* par exemple, l'angle A = C. *Fig. 6.*

Car on vient de voir que l'angle A vaut deux droits avec l'angle D; par la même raiſon, l'angle C vaut auſſi deux angles droits avec le même angle D. Donc l'angle A + D = l'angle C + D; & par conſéquent (*axiome* 4) en retranchant l'angle D de part & d'autre, l'angle A = C.

151. Seconde. *Dans le parallélogramme* ABCD, *l'un quelconque des quatre angles qui ſera connu, fera connoître chacun des trois autres.* *Fig. 6.*

Si l'on connoît, par exemple, l'angle A; comme cet angle vaut deux angles droits avec l'angle D, il eſt évident qu'en retranchant de 180 degrés, valeur de deux angles droits, la valeur de l'angle A, ce qui reſtera ſera la valeur de l'angle D ſon ſupplément.

Or l'angle A & l'angle D étant connus, on connoîtra dès-lors auſſi l'angle C qui eſt égal à A (n°. 150), & l'angle B qui eſt égal à D.

Les Angles des poligones.

PROPOSITION I.

152. *La ſomme des angles d'un poligone quelconque*

63. ABCDE *eſt égale à autant de fois deux angles droits que le poligone a de côtés, moins quatre angles droits.*

PRÉPARATION.

Tout poligone peut être regardé comme la ſomme de pluſieurs triangles; ainſi la valeur des angles d'un poligone quelconque dépend de la valeur des angles du triangle.

DÉMONSTRATION.

63. Soient d'un point quelconque O pris dans la ſurface du poligone quelconque ABCDE, menées des droites OA, OB, OC, &c. aux ſommets de tous les angles de ce poligone.

Le poligone ſera, par cette conſtruction, décompoſé en autant de triangles AOB, BOC, COD, &c. qu'il a de côtés.

Or les angles de chacun de ces triangles valent enſemble deux angles droits (n°. 138).

Donc en ſuppoſant que tous les angles de ces triangles ſont formés de ceux du poligone, on pourroit conclure que la ſomme des angles du poligone quelconque ABCDE vaut autant de fois deux angles droits que ce poligone a de côtés.

Mais, dans ces triangles, les angles faits autour du point O, ne ſont pas formés des angles du poligone, & l'on ſait (n°. 76) que ces angles valent enſemble quatre angles droits.

Donc les angles du poligone quelconque ABCDE, valent enſemble autant de fois deux angles droits que ce poligone a de côtés, moins quatre angles droits; ce qu'il falloit démontrer. (*a*)

(*a*) On ſuppoſe dans cette propoſition que tous les angles du poligone ſont ſaillans.

CONSÉQUENCE.

153. *La ſomme de tous les angles extérieurs d'un poligone quelconque* ABCDE *eſt égale à quatre angles droits.* Fig. 63.

Car l'angle extérieur FAB vaut deux angles droits avec ſon angle de ſuite BAE, chaque autre angle extérieur vaut de même deux angles droits avec ſon angle de ſuite, l'angle du poligone (n°. 73).

Donc, en prenant enſemble les angles extérieurs & les angles du poligone, leur ſomme vaudra autant de fois deux angles droits que le poligone a de côtés.

Mais on vient de démontrer (n°. 152) que les angles du poligone valent enſemble autant de fois deux angles droits que le poligone a de côtés, moins quatre angles droits.

Il reſte donc la valeur de quatre angles droits pour la ſomme des angles extérieurs.

PROPOSITION II.

154. *Dans le poligone régulier quelconque* ABCDEF, Fig. 64.

1°. *Les angles* AOB, BOC, &c. *au centre ſont égaux.*

2°. *L'angle* OAB *à la baſe eſt moitié de l'angle* FAB *du poligone.*

3°. *L'angle* AOB *au centre eſt ſupplément de l'angle* FAB *du poligone.*

4°. *Dans l'exagone régulier l'angle* AOB *au centre eſt égal à l'angle* OAB *à la baſe.*

PRÉPARATION.

On ſe rappellera que les rayons obliques diviſent le poligone régulier en des triangles entiérement égaux; que les trois angles du triangle valent enſem-

ble deux angles droits : la propoſition que l'on vient d'énoncer, n'eſt qu'une application de ces propriétés.

DEMONSTRATION.

1°. *Dans le poligone régulier quelconque* ABCDEF, *les angles* AOB, BOC, &c. *au centre ſont égaux.*

Car dans les triangles entiérement égaux, les angles oppoſés aux côtés égaux ſont égaux.

Or les triangles AOB, BOC, &c. dans leſquels le poligone régulier eſt décompoſé par les rayons obliques, ſont entiérement égaux (n°. 60) ; & de plus les angles AOB, BOC, &c. du centre ſont dans ces triangles oppoſés à des côtés égaux ; à ſavoir, aux côtés du poligone (n°. 26). Donc les angles AOB, BOC, &c. du centre ſont égaux. *Ce qu'il falloit* 1°. *démontrer.* *Fig. 64.*

2°. *L'angle* OAB *à la baſe eſt la moitié de l'angle* FAB *du poligone.*

Car les triangles AOB, AOF, &c. étant entiérement égaux (n°. 60), & les côtés FO, BO étant égaux comme rayons obliques (n°. 60), les angles OAF, OAB oppoſés à ces côtés ſont égaux ; & comme ces deux angles compoſent enſemble l'angle FAB du poligone, il eſt évident que chacun en ſera la moitié, c'eſt-à-dire, que l'angle OAB à la baſe eſt la moitié de l'angle FAB du poligone. *Ce qu'il falloit* 2°. *démontrer.*

3°. *L'angle* AOB *du centre eſt ſupplément de l'angle* FAB *du poligone.*

Car dans le triangle AOB, l'angle AOB du centre vaut deux angles droits avec la ſomme des angles OAB, OBA à la baſe (n°. 138) ; mais ces deux angles OAB, OBA à la baſe ſont égaux enſemble à l'angle FAB du poligone, puiſque l'on vient de voir que chacun en eſt la moitié. *Fig. 64.*

Donc l'angle AOB du centre vaut auſſi deux angles droits avec l'angle FAB du poligone ; c'eſt-à-dire, qu'il en eſt le ſupplément. *Ce qu'il falloit* 3°. *démontrer.*

4°. *Dans l'exagone régulier* ABCDEF, *l'angle* AOB *du centre eſt égal à chaque angle* OAB *&* BOA *à la baſe.*

Car les trois angles du triangle AOB, ont enſemble pour meſure la moitié de la circonférence, ou, ce qui eſt la même choſe, trois ſixiemes de la circonférence. *Fig. 64.*

Mais dans l'exagone régulier, l'angle AOB du centre embraſſe entre ſes côtés la ſixieme partie de la circonférence, & a par conſéquent (n° 48) pour meſure la ſixieme partie de la circonférence.

Il reſte donc deux ſixiemes de la circonférence pour la meſure des deux angles OAB, OBA à la baſe ; & comme ces deux angles ſont égaux, parce que (n°. 145) les côtés OA, OB qui leur ſont oppoſés ſont égaux (n°. 60), chacun des angles OAB, OBA aura pour meſure un ſixieme de la circonférence.

Et par conſéquent, dans l'exagone régulier, l'angle AOB du centre eſt égal à l'angle OAB à la baſe. *Ce qu'il falloit* 4°. *démontrer.*

CONSÉQUENCE.

155. *Le côté* AB *de l'exagone régulier* ABCDEF *eſt égal au rayon* OA *du cercle auquel ce poligone eſt inſcrit.* *Fig. 64.*

Car on vient de voir qu'en menant aux extrêmités A, B du côté AB de l'exagone régulier, les rayons obliques OA, OB, l'angle AOB du centre eſt égal à chaque angle OAB, OBA ſur le côté AB : le

triangle AOB a donc ſes trois angles égaux; & p
conſéquent (n°. 146) il eſt équilatéral, ce qui don
AO = AB.

C'eſt-à-dire, que le côté de l'exagone eſt égal
rayon.

CHAPITRE TROISIEME.

Application du Chapitre ſecond.

SECTION PREMIERE.

Problêmes relatifs aux lignes droites conſidérées dans leurs différentes poſitions les unes à l'égard des autres.

PROBLÊME I.

D'un point quelconque P, *donné ſur une droite* AB, *élever une perpendiculaire ſur cette droite.* Fig. 6

SOLUTION.

156. ON ſait (n°. 83) qu'une ligne droite qui eſt menée ſur une autre ligne droite, lui eſt perpendiculaire lorſque deux points de la premiere ſont à égale diſtance de deux points pris ſur la ſeconde.

Donc pour élever ſur la droite AB une perpendiculaire au point P donné,

1°. On prendra, avec une commune meſure, un compas, par exemple, ou une corde, les points M, N à égale diſtance du point P.

2°. On cherchera un ſecond point tel que D, qui ſoit à égale diſtance des mêmes points M, N. Pour le trouver, on fixera au point M l'extrêmité d'une corde, ou la pointe d'un compas; & faiſant tourner l'autre extrêmité de la corde, ou l'autre pointe du compas, on tracera l'arc RS; du point N comme centre, & avec la même corde, ou avec la même ou- Fig.

verture du compas (comme rayon), on tracera l'arc TV qui coupe l'arc RS en un point D.

Les diſtances DM, DN de ce point D aux points M, N ſeront évidemment égales, puiſque chacune de ces diſtances ſera égale à la même corde ou à la même ouverture du compas que l'on aura priſe pour tracer les arcs RS, TV.

3°. Enfin par le point D & par le point donné P, on menera la droite PD.

Cette droite PD élevée au point donné P, ſera évidemment perpendiculaire ſur la droite AB, puiſque (par la conſtruction) elle a deux points; à ſavoir, P, D, également éloignés de deux points M, N de la droite AB.

REMARQUE.

157. Lorſque l'arc du cercle à décrire a un rayon trop long pour que l'on puiſſe le tracer avec le compas ordinaire, on emploie un cordeau terminé par deux nœuds dans chacun deſquels on fait entrer un piquet; l'un de ces piquets ſert à aſſujettir au centre de l'arc l'une des extrêmités du cordeau; l'autre piquet ſert à tracer l'arc.

On peut auſſi ſe ſervir d'un *compas à couliſſe*: ce compas eſt une perche armée de deux pointes perpendiculaires; l'une de ces pointes eſt fixée à l'une des extrêmités de la perche, & ſe poſe ſur le centre de l'arc à décrire; l'autre pointe peut gliſſer dans toute la longueur de la perche, & ſe fixe par le moyen d'une vis à l'endroit que l'on ſouhaite, ſelon la grandeur du rayon de l'arc que cette pointe doit décrire.

On appellera dans la ſuite ces différens inſtrumens, *Compas*; & lorſqu'il ſera queſtion de décrire de deux différens centres deux arcs qui ſe coupent, on ſuppoſera toujours des ouvertures de compas telles que leur

leur ſommet ſoit plus grand que la diſtance des deux centres ; car autrement les deux arcs que l'on décriroit ne pourroient pas ſe couper.

PROBLÊME II.

158. *D'un point quelconque* P *donné en-dehors d'une droite* AB, *mener une perpendiculaire ſur cette droite.*

SOLUTION.

Puiſqu'une ligne droite menée ſur une autre droite lui eſt perpendiculaire lorſque la premiere a deux points également diſtans de deux points de la ſeconde (n°. 83), il eſt évident que l'on abaiſſera du point donné P une perpendiculaire ſur la droite AB, en obſervant la méthode qui ſuit. *Fig. 66*

On fixera au point donné P l'une des pointes du compas, & avec une même ouverture de cet inſtrument, on marquera avec l'autre pointe ſur la droite AB les points M, N qui ſeront évidemment également éloignés du point extérieur P donné.

On cherchera enſuite, comme dans le problême précédent, un ſecond point X également éloigné des mêmes points M, N.

Enfin par les points M, N, on menera la droite PDX qui ſera la perpendiculaire demandée.

PROBLÊME III.

159. *Par l'extrêmité* B *d'une droite* AB, *mener une perpendiculaire ſur cette droite.* *Fig. 67*

SOLUTION.

On reconnoît que deux droites ſont perpendiculaires l'une à l'autre, lorſque l'angle qu'elles forment enſemble eſt droit (n°. 62) ; on ſait encore (n°. 131) *Fig. 67*

que l'angle à la circonférence eſt droit lorſqu'il eſt appuyé ſur le diametre.

Donc pour élever à l'extrêmité B ſur la droite AB une perpendiculaire, il ſuffira de rendre cette droite AB le côté d'un angle à la circonférence, dont le ſommet ſoit le point B, & qui ſoit appuyé ſur le diametre; le ſecond côté de cet angle ſera la perpendiculaire cherchée.

Pour y parvenir, d'un point quelconque O pris en-dehors de la droite AB, comme centre, & avec une ouverture de compas égale à la diſtance du point O à l'extrêmité B de la droite AB, on décrira une circonférence MBN, &c. qui coupe la droite AB ou ſon prolongement en un point M.

Par le point M d'interſection, & par le centre O, on menera le diametre MN.

Enfin par l'extrêmité N du diametre, & par l'extrêmité B de la droite AB, on menera la corde NB qui ſera la perpendiculaire demandée.

PROBLÊME IV.

Fig. 68. 160. *Diviſer une droite* AB *donnée en deux parties égales.*

SOLUTION.

Parce que la poſition de la ligne droite dépend de deux points (n°. 38), il eſt évident qu'une droite qui *Fig. 68.* aura deux quelconques de ſes points également éloignés des extrêmités A, B de la droite AB, aura tous ſes autres points également éloignés des mêmes extrêmités A, B, & paſſera par conſéquent par le milieu M de la droite AB.

Ainſi pour couper la droite AB en deux parties égales, on cherchera par la méthode que l'on a donnée dans la ſolution des deux premiers problêmes (n°. 156,

158), deux points tels que P, D également éloignés chacun des extrêmités A, B de la droite AB, & enſuite on menera entre les points P, D la droite PD.

Cette droite PD paſſera par le milieu M de la droite AB, parce qu'elle aura, par la conſtruction, deux points P, D également éloignés des extrêmités A, B.

PROBLÊME V.

161. *Par un point* D *pris en-dehors d'une droite* AB, *mener une parallele à cette droite.*

SOLUTION.

Deux droites qui ſont perpendiculaires ſur une troiſieme droite ſont paralleles (n°. 91). *Fig. 69*

Donc pour mener par le point D une droite parallele à la ligne AB, il ſuffira de mener par ce point D une droite QP perpendiculaire ſur AB (n°. 158), & par le même point D une droite RS perpendiculaire ſur QP (n°. 156). Cette droite RS ſera la parallele demandée, puiſque les lignes AB & RS ſeront, par la conſtruction, toutes deux perpendiculaires ſur QP.

AUTRE SOLUTION.

On ſe rappellera (n°. 120) que deux droites ſont paralleles lorſqu'elles comprennent dans le cercle des arcs égaux; & l'on conclura cette autre méthode pour mener par le point D une parallele à la droite AB. *Fig. 7*

On prendra à volonté ou ſur la ligne AB, ou en-dehors de cette ligne un point O pour centre, & avec une ouverture de compas égale à la diſtance de ce point O au point donné D, on décrira une circonférence MDEN qui coupe la droite AB en deux points M, N.

On ouvrira le compas de la grandeur de la corde MD de l'arc MPD compris entre la ligne AB & le point donné D; & l'on portera cette ouverture ſur la circonférence depuis le ſecond point N d'interſection juſqu'à un point E qui ſoit du même côté de AB que le point donné D.

Enfin par les points D & E on menera la droite RS qui ſera parallele à la droite AB.

Car les cordes MD, NE étant égales (par la conſtruction), les arcs MPD, NQE qu'elles ſoutiennent ſont égaux (n°. 104); & par conſéquent (n°. 120) les droites RS, AB qui comprennent ces arcs égaux ſont paralleles.

SECTION II.

Application des propriétés des droites conſidérées dans le cercle.

PROBLÊME I.

162. *FAIRE paſſer une circonférence par trois points quelconques* A, B, C *qui ne ſont pas en ligne droite.* fig. 71.

SOLUTION.

Il eſt évident que pour faire paſſer une circonférence par les trois points A, B, C donnés, il ſuffit d'en déterminer le centre; c'eſt-à-dire, le point O à égale diſtance de ces trois points.

Et comme une perpendiculaire élevée ſur le milieu d'une corde paſſe toujours par le centre du cercle (n°. 118), on conclura la méthode ſuivante pour trouver le centre O.

On joindra par deux cordes AB, BC, les points A & B, B & C.

On divisera ensuite chacune des cordes AB, BC en deux également par les perpendiculaires ZP, XQ (n°. 160).

Chacune de ces perpendiculaires passera (comme on vient de le dire) par le centre du cercle ; ce centre étant ainsi un point commun à ces deux perpendiculaires, sera nécessairement leur point O d'intersection.

Fixant donc une pointe du compas à ce point O l'intersection des perpendiculaires, & décrivant une circonférence avec un rayon égal à la distance du point O à l'un des points A, B, C donnés, cette circonférence passera par ces trois points.

REMARQUE.

163. Les trois points A, B, C par lesquels il faut faire passer une circonférence, peuvent être les sommets des trois angles du triangle ; ainsi l'on a dans la solution du problème précédent, le moyen de faire passer une circonférence par les sommets des angles du triangle, c'est-à-dire, de circonscrire un cercle à un triangle donné.

Les trois points A, B, C peuvent être les sommets de trois angles d'un poligone régulier ABCDE. On a donc encore dans la solution du problème précédent, le moyen de déterminer le centre d'un poligone régulier quelconque. *Fig. 72.*

Et par conséquent aussi le moyen 1°. de faire passer une circonférence par les sommets des angles de ce poligone, c'est-à-dire, de circonscrire un cercle au poligone régulier ABCDE ; car lorsqu'on aura déterminé le centre O de ce poligone, si l'on décrit du centre O, avec une ouverture de compas égale au rayon oblique OB une circonférence, cette circonférence passera par les sommets de tous les angles du

poligone, puiſque (n°. 28) dans le poligone régulier le centre eſt à égale diſtance des ſommets de tous les angles du poligone.

2°. D'inſcrire un cercle dans le poligone régulier
Fig. 75. ABCDE; car lorſqu'on aura déterminé le centre O de ce poligone, ſi l'on mene l'apotheme OG, & que du centre O, avec une ouverture de compas égale à l'apotheme OG, on décrive une circonférence, comme les apothemes OG, OH, &c. ſont égaux (n°. 60), cette circonférence aura ces apothemes pour rayons; & comme ces mêmes apothemes ſont perpendiculaires ſur les côtés AB, BC, &c. du poligone, puiſque (n°. 83) chaque apotheme a deux points à égale diſtance des extrêmités du côté ſur lequel il tombe; à ſavoir (n°. 30), le centre & le milieu de ce côté; les côtés AB, BC, &c. du poligone ſeront autant de tangentes (n°. 115) à la circonférence décrite, par conſéquent (n°. 137) le poligone régulier ABCDE ſera circonſcrit à cette circonférence, ou, ce qui eſt la même choſe, cette circonférence ſera inſcrite dans ce poligone.

Fig. 71. Les trois points A, B, C donnés, peuvent être auſſi trois points d'un arc ABC donné, dont on ne connoît pas le centre; on pourra donc auſſi, en appliquant la ſolution du problême précédent, déterminer le centre d'un arc donné, & achever la circonférence.

PROBLÊME II.

Fig. 71. 164. *Couper un arc* AMB *donné, en deux parties égales.*

SOLUTION.

On a vu (n°. 118) que la perpendiculaire abaiſſée du centre du cercle ſur une corde, partage cette corde & l'arc qu'elle ſoutient en deux également.

Donc pour diviſer l'arc AMB en deux parties égales, on joindra d'abord les extrêmités A, B de cet arc par la corde AB; on menera enſuite (n°. 158) par le centre O, ſur la corde AB, la perpendiculaire ZP qui coupe l'arc AMB; & l'on aura l'arc AM = l'arc MB.

PROBLÊME III.

165. *Mener une tangente à un point* A *donné, d'une circonférence* AFE. Fig. 73.

SOLUTION.

Une droite menée perpendiculairement à l'extrêmité du rayon du cercle eſt tangente du cercle à cette extrêmité du rayon (n°. 115).

Donc pour avoir une tangente au point A de la circonférence AFE, on commencera par mener un rayon OA au point A, & enſuite on menera à l'extrêmité A de ce rayon la perpendiculaire AB ſur le rayon OA (n°. 159).

PROBLÊME IV.

166. *Déterminer le point où une tangente* AB *rencontre la circonférence* AFE.

SOLUTION.

La droite menée par le centre du centre perpendiculairement ſur la tangente, paſſe par le point d'attouchement (n°. 113). Fig. 73.

Donc étant donnée la tangente AB on déterminera le point A auquel elle rencontre la circonférence AFE, en menant par le centre O du cercle (n°. 158) la droite OA perpendiculaire à la tangente AB.

PROBLÊME V.

167. *D'un point* E *pris en-dehors d'un cercle* X, *mener une tangente à ce cercle.*

SOLUTION.

La tangente à un point quelconque de la circonférence du cercle fait un angle droit avec le rayon mené au point d'attouchement (n°. 115); on ſait encore (n°. 131) que l'angle à la circonférence appuyé ſur le diametre eſt droit. fig. 74.

Donc pour mener une tangente par le point extérieur E donné, au cercle X, on joindra d'abord le point E & le centre O du cercle X, par une droite EO; ayant enſuite coupé cette droite EO en deux également (n°. 160) au point C; de ce point C comme centre, & avec un rayon égal à la moitié EC ou OC de la droite EO, on décrira une circonférence AEB qui coupera la circonférence du cercle X aux points A, B; enfin du point extérieur E, on menera aux points A, B d'interſection les droites EA, EB; chacune des droites EA, EB ſera tangente au cercle X. fig. 74.

Car en menant aux points A, B les rayons OA, OB, on a les angles EAO, EBO dont les ſommets ſont ſur la circonférence AEB, & qui ſont appuyés ſur le diametre EO; les droites EA, EB menées aux extrêmités des rayons OA, OB ſont donc perpendiculaires ſur ces rayons (n°. 131), & par conſéquent (n°. 115) tangentes au cercle X.

SECTION III.

Problêmes relatifs aux angles conſidérés dans le cercle & dans les figures rectilignes.

PROBLÊME PREMIER.

168. *FAIRE ſur une droite* OM *donnée, à un point donné* O *de cette droite, un angle égal à un angle* ABC *donné.*

SOLUTION.

Deux angles ſont égaux, lorſqu'ayant leur ſommet au centre d'un même cercle, ou de deux cercles égaux, ils comprennent entre leurs côtés des arcs égaux (n°. 49). *Fig. 76.*

Ainſi on fera ſur la droite OM au point O un angle égal à l'angle ABC donné, par la méthode ſuivante.

On commencera par décrire du ſommet B de l'angle ABC comme centre, & avec une ouverture de compas à volonté, l'arc DEF entre ſes côtés.

On décrira enſuite, avec la même ouverture de compas, & du point O donné comme centre, ſur la droite OM l'arc indéfini RPZ. *Fig. 76.*

On portera la corde DE de l'arc DFE ſur l'arc indéfini RPZ de R en S; enfin par le point O & par le point S, on menera la droite OSN.

Cette droite ON fera, avec la droite donnée OM au point O donné, l'angle MON égal à l'angle ABC donné.

Car les rayons des arcs DFE, RPS étant égaux par la conſtruction, les cordes de ces arcs étant auſſi éga-

les, les arcs DFE, RPS ſont égaux (n°. 104); & par conſéquent les angles MON, ABC qui comprennent ces arcs entre leurs côtés, & qui ont leur ſommet au centre de ces arcs, ſont égaux.

PROBLÊME II.

169. *Diviſer en deux parties égales un angle* ABC *donné.*

SOLUTION.

77. Du ſommet B de l'angle ABC donné, on décrira entre les côtés de cet angle l'arc EMF; on menera enſuite par le ſommet B une droite BX qui (n°. 164) diviſe l'arc EMF en deux parties EM, FM égales. Cette droite BX diviſera auſſi l'angle ABC donné en deux angles ABX, CBX égaux, puiſque ces deux angles ABX, CBX auront leur ſommet au centre C des arcs égaux EM, FM compris entre leurs côtés (n°. 49).

REMARQUE.

77. 170. Il eſt viſible que de même que l'on a diviſé l'angle ABC en deux parties égales, on pourroit par la même méthode diviſer chaque moitié de l'angle ABC en deux parties égales; ce qui feroit diviſer l'angle ABC en quatre parties égales. On pourroit de même diviſer chaque quart de l'angle ABC en deux parties égales : par cette nouvelle opération, l'angle ABC ſeroit diviſé en huit parties égales; ainſi un angle quelconque ABC peut être diviſé en des nombres de parties égales, exprimés par les termes de la progreſſion géométrique ∴ 2 : 4 : 8 : 16 : 32, &c.

Mais propoſe-t'on de diviſer l'angle ABC quelconque ſeulement en trois parties égales, on eſt arrêté tout court; c'eſt le fameux problême connu ſous

le nom de *Triſection de l'angle*, qui a tant exercé les Anciens : on ne réuſſit à le réſoudre que par la Géométrie compoſée.

PROBLÊME III.

171. *Meſurer le nombre des degrés d'un angle* ABC *donné.* Fig. 78.

SOLUTION.

Pour pouvoir meſurer le nombre des degrés d'un angle ABC quelconque donné, on a conſtruit avec une matiere ſolide un demi-cercle X dont l'on a diviſé l'arc dans ſes 180 degrés : ce demi-cercle ſe nomme *Rapporteur.*

On poſe le centre de cet inſtrument ſur le ſommet B de l'angle ABC donné ; & ayant aligné ſon diametre ſur l'un BA des côtés de l'angle, on remarque le point *n* auquel l'autre côté BC coupe la demi-circonférence ; à ce point *n* eſt marqué le nombre des degrés de l'arc compris entre les côtés de l'angle ABC, & dont le centre eſt au ſommet B de l'angle ; le nombre marqué au point *n* déſignera par conſéquent (n°. 48) le nombre des degrés de l'angle ABC.

PROBLÊME IV.

172. *Meſurer l'angle ſous lequel on voit d'un endroit* O *donné, une droite* PB *propoſée.* Fig. 79.

SOLUTION.

En imaginant des droites OP, OB menées des extrémités P, B de la droite PB au point O où l'œil eſt placé, l'angle POB ſera évidemment l'angle ſous lequel on voit du point O la droite PB.

Pour meſurer cet angle on ſe ſert d'un inſtrument X que l'on nomme *Graphometre :* il eſt compoſé de

deux regles AL, DE qui ſe croiſent dans le milieu O de leur longueur, & qui ſont garnies à leurs extrémités de deux pieces perpendiculaires percées à jour, que l'on nomme *Pinules*; l'une DE de ces regles ſert de diametre à un demi-cercle DFE diviſé en 180 degrés; l'autre regle AL que l'on nomme *Alidade* eſt mobile ſur le centre O du demi-cercle.

On place le centre du graphometre de façon qu'il réponde au ſommet O de l'angle BOP, puis on fait mouvoir le demi-cercle ſur ſon genou G, juſqu'à ce qu'en regardant par les pinules D, E, on apperçoive l'extrêmité P de la droite PB. Enfin ſans déranger le demi-cercle, on fait mouvoir l'alidade juſqu'à ce qu'en regardant par les pinules A, L, on apperçoive l'autre extrêmité B de la droite PB; alors l'alidade marquera ſur la circonférence du demi-cercle le nombre des degrés de l'angle POB (n°. 48).

PROBLÊME V.

173. *Faire ſur une droite* AB *donnée à un point* B *de cette droite un angle d'un nombre de degrés déterminé.*

SOLUTION.

Fig. 78. 1°. Si la droite AB eſt donnée ſur le papier, on ſe ſervira du *rapporteur*; on mettra le centre de cet inſtrument ſur le point B qui doit être le ſommet de l'angle; ayant enſuite aligné le diametre du demi-cercle ſur la droite AB, on marquera ſur le papier le point *n* qui répond au point de la circonférence du rapporteur où eſt marqué le nombre des degrés que doit avoir l'angle demandé; enfin par le point B & par le point *n*, on menera la droite BC qui fera avec la droite AB au point donné B, l'angle ABC du nombre de degrés demandé (n°. 48).

Fig. 80. 2°. Si la droite AB eſt donnée ſur le terrein, on ſe

ſervira du *graphometre ;* on placera cet inſtrument de façon que ſon centre réponde verticalement au point B qui doit être le ſommet de l'angle ; ayant enſuite aligné le diametre EF horizontalement ſur la droite AB, on mettra l'alilade ſur le point L de la circonférence, où eſt marqué le nombre des degrés que doit avoir l'angle demandé ; & regardant alors par les pinules H, L, on fera planter un jalon ou piquet D ſur le prolongement du rayon viſuel HL ; la droite BD déterminée (n°. 38) par le point B, D, fera au point B ſur la droite AB l'angle ABD du nombre de degrés demandé : on marque cet angle ſur le terrein en plantant un jalon au ſommet B, & un jalon ſur chaque côté AB, BD.

PROBLÊME VI.

174. *Faire ſur une droite* AB *donnée, un angle du ſegment égal à un angle* M *donné.*

SOLUTION.

Ayant fait ſur la droite AB donnée au point A l'angle BAD égal à l'angle M donné (n°. 168), il eſt évident (n°. 126) que pour que cet angle BAD devienne un angle du ſegment, il ne s'agit plus que de trouver le centre du cercle dans lequel la droite AB ſoit une corde, & qui ait pour tangente au point A l'autre côté AD de l'angle BAD que l'on vient de faire : or ce centre étant toujours & ſur la perpendiculaire élevée ſur la tangente au point d'attouchement (n°. 117), & ſur la perpendiculaire élevée ſur le milieu d'une corde (n°. 118), on le déterminera par la méthode qui ſuit : *Fig.* 81.

On élevera (n°. 159) une perpendiculaire XA ſur la droite AD au point A auquel cette droite AD doit être tangente. *Fig.* 81.

On élevera encore (n°. 156) une perpendiculaire ZP ſur le milieu de la droite AB qui doit ſervir de corde.

Fig. 21.

Le centre du cercle ſera (comme on vient de le dire) ſur chacune de ces perpendiculaires, & ſera par conſéquent leur point O d'interſection.

Décrivant donc une circonférence du point O comme centre, & d'une ouverture de compas égale à OA, la droite AB donnée ſera une corde dans cette circonférence, & l'autre côté AD de l'angle BAD ſera tangente au point A de cette circonférence (n°. 115); l'angle BAD que l'on a fait égal à l'angle M donné ſera donc un angle du ſegment, & par conſéquent l'on aura fait ſur la droite AB donnée un angle du ſegment égal à un angle donné.

PROBLÊME VII.

175. *Faire ſur une droite* AB *donnée un ſegment capable d'un angle* M *donné.*

SOLUTION.

Fig. 81.

Faire ſur la droite AB donnée un ſegment capable d'un angle M donné, c'eſt faire ſur la droite AB un ſegment AEB, dans lequel un angle quelconque AHB à la circonférence, & appuyé ſur la corde AB, ſoit égal à l'angle M donné.

Or lorſqu'un cercle eſt coupé par une corde AB, l'angle dans l'un AEB des deux ſegmens eſt égal à l'angle de l'autre ſegment AFB (n°. 133). Donc pour faire ſur la droite AB un ſegment capable de l'angle M donné, il ſuffira de faire (n°. 174) ſur la droite AB un angle BAD du ſegment égal à l'angle M donné; car on aura dès-lors, par cette ſeule conſtruction, le ſegment AEB, dans lequel tout angle AHB à la circonférence, & appuyé ſur la corde AB, ſera égal

à l'angle BAD du ſegment AFB, & par conſéquent égal à l'angle M donné, puiſque l'on aura fait l'angle BAD égal à l'angle M.

PROBLÊME VIII.

176. *Meſurer un angle* XAB *inacceſſible dont on ſuppoſe cependant que l'on voit les côtés* AX, AB.

SOLUTION.

Deux angles d'un triangle qui ſont connus font connoître le troiſieme (n°. 142). *Fig.* 82.

Donc on déterminera l'angle XAB inacceſſible, en le rendant le troiſieme angle d'un triangle dont on puiſſe meſurer les deux autres angles.

Pour conſtruire ce triangle on plantera les jalons D, C ſur les côtés AX, AB prolongés au-delà du ſommet A.

Le ſommet A & les jalons D, C ſeront les ſommets des trois angles d'un triangle CAD, dans lequel venant à meſurer avec le graphometre (n°. 171) les deux angles C, D, on conclura la valeur du troiſieme CAD, ou de ſon oppoſé au ſommet BAX (n°. 77).

PROBLÊME IX.

177. *Déterminer dans le poligone régulier quelconque* ABCDE.

1°. *L'angle* AOB *du centre.*

2°. *L'angle* FAB *du poligone.*

3°. *L'angle* OAB *à la baſe.*

Etant donné le nombre des côtés de ce poligone.

SOLUTION.

1°. Dans le poligone régulier tous les angles au centre valent enſemble quatre angles droits (n°. 76); c'eſt-à-dire, qu'ils ſont enſemble meſurés par 360 de- *Fig.* 83.

grés, valeur de la circonférence, & la meſure de quatre angles droits; de plus, dans le poligone régulier, les angles au centre ſont égaux entr'eux (n°. 154): ainſi chaque angle AOB au centre dans le poligone régulier ABCDEF, aura pour meſure le nombre de degrés qui viendra en diviſant 360 degrés par le nombre des angles au centre du poligone ABCDEF propoſé, ou par le nombre des côtés de ce poligone; enſorte que ſi le poligone régulier a 5, ou 6, ou 7, &c. côtés, l'angle au centre aura pour meſure la cinquieme, ou la ſixieme, ou la ſeptieme, &c. partie de 360 degrés.

2°. L'angle FAB du poligone, & l'angle AOB au centre valent enſemble deux angles droits (n°. 154).

Donc, lorſque l'on aura déterminé la valeur de l'angle AOB au centre, on aura la valeur de l'angle FAB du poligone en retranchant de 180 degrés, valeur de deux angles droits, la valeur de l'angle AOB au centre.

3°. L'angle OAB à la baſe eſt la moitié de l'angle FAB du poligone (n°. 154). Donc, l'angle FAB du poligone fera connoître l'angle OAB à la baſe.

SECTION IV.

Conſtruction des Figures rectilignes.

PROBLÊME I.

84. 178. *SUR une droite* B *donnée, conſtruire un triangle équilatéral.*

SOLUTION.

Conſtruire un triangle équilatéral ſur la droite B donnée, c'eſt faire un triangle dont les trois côtés ſoient égaux chacun à la droite B donnée.

On

On tirera donc d'abord une ligne droite AB égale à la ligne B donnée; enſuite de chaque extrêmité A, B de la droite AB comme centre, & avec un rayon égal à cette même droite AB, on décrira des arcs qui ſe coupent en un point C; on joindra enfin le point C avec les extrêmités A, B par les droites AC, BC: il réſultera le triangle ACB, dont chaque côté ſera évidemment égal à la droite donnée B.

PROBLÊME II.

179. *Conſtruire un triangle dont les côtés ſoient égaux aux droites* A, B, C *données.* Fig. 85.

SOLUTION.

On tirera d'abord une ligne AB égale à la droite B donnée; enſuite de l'extrêmité A de la ligne AB comme centre, & avec un rayon égal à la ligne A, on décrira un arc indéfini; de l'autre extrêmité B de la ligne AB comme centre, & avec un rayon égal à la ligne C, on décrira un autre arc qui coupe le premier en un point C; enfin on joindra ce point C avec les extrêmités A, B de la droite AB par les droites AC, BC, & l'on aura le triangle ACB, dont les trois côtés AB, AC, BC ſeront égaux, par la conſtruction, aux droites B, A, C données, chacun à chacune.

REMARQUE.

On ſuppoſe que les trois lignes A, B, C données, ſont telles que deux quelconques priſes enſemble ſoient plus grandes que la troiſieme, puiſque dans tout triangle deux côtés quelconques pris enſemble, ſont toujours plus grands que le troiſieme (n°. 53). Fig. 85.

PROBLÈME III.

g. 86. 180. *Construire un triangle dont un côté soit é une droite B donnée, & dans lequel les angles s côté soient égaux à deux angles* P, Q *donnés, ch à chacun.*

SOLUTION.

g. 86. On tirera d'abord une ligne AB égale à la lig donnée; on fera enſuite (n°. 168) à l'extrêmité ſur la ligne AB, l'angle P égal à l'angle P donné à l'extrêmité B l'angle Q à l'angle Q donné, pro geant les côtés de ces angles juſqu'à ce qu'ils ſe contrent en un point C, on aura le triangle ACB ſera évidemment dans les conditions demandées.

PROBLÈME IV.

87. 181. *Conſtruire un triangle qui ait un angle é un angle* P *donné, & les côtés autour de cet angle é à deux droites* A, B *données, chacun à chacune.*

SOLUTION.

On tirera d'abord une droite AC égale à la dr A donnée; on fera enſuite (n°. 168) au point C, CA, l'angle P égal à l'angle P donné, & l'on fe ſecond côté CB de l'angle P égal à la ſeconde li B donnée; enfin on joindra les extrêmités A, B côtés CA, CB par la droite AB; & l'on aura le tr gle ACB viſiblement dans les conditions demand

REMARQUE.

On a vu (n° 58) que deux triangles ſont entiè ment égaux lorſqu'ils ont leurs trois côtés égaux c cun à chacun; ou un côté égal, & les angles adjac

à ce côté égal, égaux chacun à chacun ; ou un angle égal compris entre des côtés égaux chacun à chacun. On pourra donc regarder les ſolutions des problêmes II. III. IV. (n°. 179, 180, 181) comme autant de moyens de faire un triangle entiérement égal à un triangle propoſé.

PROBLÊME V.

182. *Conſtruire un quarré ſur une ligne droite* A *donnée.* Fig. 8

SOLUTION.

Le quarré eſt un quadrilatere dont les quatre côtés ſont égaux, & perpendiculaires les uns aux autres (n°. 24).

Donc pour faire un quarré dont chaque côté ſoit égal à la droite A donnée, on commencera par tirer une droite AB égale à la droite A, on élevera enſuite (n°. 159) ſur AB à ſes extrêmités A, B, les perpendiculaires AD, BC égales chacune à la même ligne A donnée ; enfin on joindra les extrêmités D, C par la droite DC, & le quadrilatere ABCD ſera évidemment le quarré demandé.

PROBLÊME VI.

183. *Conſtruire un rectangle qui ait pour côtés contigus deux droites* A, B *données.* Fig. 8

SOLUTION.

Le rectangle eſt un quadrilatere dont les côtés ſont perpendiculaires les uns aux autres, & égaux deux à deux ; à ſavoir, les oppoſés (n°. 25).

Donc pour conſtruire un rectangle qui ait pour côtés contigus les droites A, B ; on commencera par tirer une droite AB égale à la ligne A ; on élevera en- Fig. 8

ſuite ſur AB, à ſes extrêmités A, B les perpendiculaires AD, BC égales chacune à la ſeconde ligne B donnée; enfin on joindra les points D, C par la droite DC, & le quadrilatere ABCD ſera évidemment le rectangle demandé.

PROBLÊME VII.

184. *Faire un parallélogramme dont les côtés contigus ſoient égaux à deux droites* A, B *donnés, & faſſent un angle égal à un angle* P *donné.*

SOLUTION.

§. 90. On ſait (n°. 89) que le parallélogramme eſt un quadrilatere dont les côtés oppoſés ſont paralleles.

On tirera donc une ligne AB égale à la droite A donnée; on fera (n°. 168) ſur AB à ſon extrémité A l'angle P égal à l'angle P donné, & l'on fera le ſecond côté AD de cet angle conſtruit P, égal à la ſeconde ligne B donnée; enfin on menera par le point B une droite BC parallele au côté AD, & par le point D une droite DC parallele au côté AB; & le quadrilatere ABCD ſera évidemment le parallélogramme demandé.

PROBLÊME VIII.

185. *Conſtruire ſur une droite* AB *donnée, un poligone régulier d'un nombre de côtés déterminé.*

SOLUTION.

§. 91. 1°. Si le côté AB donné eſt d'une grandeur peu conſidérable, & que la place que doit occuper le poligone ſoit libre, on conſtruira ce poligone par le moyen de la circonférence, de cette ſorte:

On cherchera dans le poligone régulier du nombre

de côtés propoſé, la valeur de l'angle à la baſe (n°. 177), & l'on fera ſur le côté AB donné à chaque extrêmité A, B un angle X de la valeur que l'on aura trouvée (n°. 168).

Cette premiere opération fera connoître le rayon OA, & le centre O du cercle circonſcrit au poligone demandé (n°. 136); on décrira donc du centre O, & avec le rayon OA, une circonférence; on portera ſur cette circonférence le côté AB, de B en C, de C en D, &c. & l'on aura ſur le côté donné AB, le poligone ABCDE qu'il falloit conſtruire.

2°. Lorſque le côté AB donné ſera d'une grandeur trop conſidérable pour que l'on puiſſe conſtruire le poligone demandé par le moyen de la circonférence, on pourra conſtruire ce poligone par le moyen de l'angle du centre, (en ſuppoſant toujours que l'intérieur du poligone à conſtruire ſoit un terrein libre). *Fig. 92.*

On commencera, comme ci-deſſus, par faire ſur le côté AB, à chaque extrêmité A, B, l'angle X du nombre de degrés que doit avoir l'angle à la baſe dans le poligone demandé.

Cette premiere conſtruction déterminera le centre O du poligone demandé, l'angle AOB du centre, & le rayon oblique AO.

On fera enſuite au centre O les autres angles au centre BOC, COD, DOE, &c. égaux chacun à l'angle AOB, les rayons OC, OD, OE, égaux chacun au rayon OA; & l'on plantera des jalons aux extrêmités C, D, E de ces rayons, de même qu'aux points A, B.

Il eſt évident que dans cette conſtruction les jalons A, B, C, D, E marqueront les ſommets des angles du poligone à conſtruire.

3°. Un obſtacle quelconque rend quelquefois inacceſſible le centre du poligone régulier à conſtruire,

alors on a recours aux angles du polygone, de cette façon :

fig. 93. En supposant, par exemple, qu'il faut construire un pentagone régulier sur la droite AB donnée sur le terrein.

On fera (n°. 173) à l'extrémité B de cette droite, un angle ABC de la valeur de l'angle du polygone (n°. 177) dans le pentagone régulier, c'est-à-dire, de 108 degrés, & l'on fera BC = AB.

On fera sur BC au point C l'angle BCD = ABC, & CD = BC ou AB.

On fera sur CD au point D l'angle CDE = ABC, & le côté DE = AB.

Les points extrêmes E, A détermineront le dernier côté EA, & le polygone ABCDE demandé sera construit.

PROBLÊME IX.

fig. 94, 95. 186. *Inscrire dans un cercle X donné, un quarré & les figures régulieres d'un nombre de côtés continuellement double.*

SOLUTION.

fig. 94. 1°. Le quarré a ses quatre côtés égaux, & ses quatre angles droits (n°. 24). Donc lorsque le quarré est inscrit dans le cercle, chacun de ses côtés soutient le quart de la circonférence, & chacun de ses angles doit être appuyé sur un diametre (n°. 131).

Et par conséquent pour inscrire un quarré dans le cercle X, il faudra d'abord partager la circonférence en quatre parties égales par deux diametres AC, BD, qui se coupent à angles droits (n°. 156).

On joindra ensuite les extrêmités de ces diametres par les cordes AB, BC, CD, DA; dans le quadrilatere ABCD qui résultera, chaque côté sera évi-

demment la corde d'un arc de 90 degrés, & chaque angle A, B, C, D ſera un angle à la circonférence appuyé ſur le diametre.

Et par conſéquent le quadrilatere ABCD eſt le quarré qu'il falloit inſcrire dans le cercle X.

2°. Le nombre des côtés de l'octogone étant double du nombre des côtés du quarré, il eſt viſible que le côté de l'octogone régulier inſcrit dans le cercle X, ſoutiendra un arc qui ſera la moitié de l'arc ſoutenu par le côté du quarré inſcrit dans le même cercle X. *Fig. 95.*

Ainſi pour inſcrire dans le cercle X un octogone régulier, on déterminera d'abord, comme on vient de le faire, le côté AG du quarré inſcrit dans le même cercle X; on diviſera enſuite en deux parties égales AH, HG (n°. 164) l'arc AHG ſoutenu par le côté AG du quarré, la corde AH de l'arc AH moitié de l'arc AHG, ſera le côté de l'octogone inſcriptible au cercle X; portant cette corde AH ſur la circonférence, on aura l'octogone ABCDE, &c. inſcrit.

3°. On inſerira de même le poligone régulier de ſeize côtés, en diviſant en deux parties égales l'arc AH ſoutenu par le côté de l'octogone régulier, & en portant ſur la circonférence la corde de la moitié de l'arc AH.

Et ainſi de ſuite.

PROBLÊME X.

387. *Inſcrire dans un cercle X donné, un exagone régulier, un triangle équilatéral, & les figures régulieres d'un nombre de côtés continuellement double du nombre des côtés de l'exagone.* *Fig. 96, 97.*

SOLUTION.

1°. Le côté de l'exagone régulier inſcrit dans un cercle X, eſt égal au rayon de ce cercle (n°. 155). *Fig. 96.*

On portera donc le rayon OA ſur la circonférence de A en B, de B en C, de C en D, &c. & l'on aura l'exagone régulier ABCDEF inſcrit au cercle X.

ig. 96. 2°. Le nombre des côtés du triangle équilatéral étant la moitié du nombre des côtés de l'exagone, il eſt évident que le côté du triangle équilatéral inſcrit au cercle X, ſoutiendra un arc double de celui que ſoutient le côté de l'exagone inſcrit au même cercle.

Ainſi en portant le rayon ou le côté de l'exagone ſur la circonférence deux fois de ſuite, par exemple, de A en B, & de B en C, & en ſoutenant par une corde AC la ſomme des arcs AB, BC ſoutenus par deux côtés de l'exagone, cette corde AC ſera le côté du triangle équilatéral ACE inſcrit au cercle X.

g. 97. 3°. Le nombre des côtés du dodécagone régulier, c'eſt-à-dire, d'une figure réguliere de douze côtés, étant double du nombre des côtés de l'exagone, il eſt clair que le côté du dodécagone régulier inſcrit au cercle X, doit ſoutenir un arc égal à la moitié de celui que ſoutient le côté de l'exagone inſcrit au même cercle X.

Par conſéquent, ſi on porte le rayon OA du cercle ſur la circonférence, par exemple, de A en L, pour avoir l'arc ANL ſoutenu par le côté de l'exagone, & que l'on diviſe (n°. 164) cet arc ANL en deux parties égales au point N, l'arc AN ſera l'arc ſoutenu par le côté du dodécagone régulier inſcrit au cercle X, & la corde AN de cet arc ſera le côté de ce dodécagone, &c.

La corde de la moitié de l'arc AN, ſeroit, par les mêmes raiſons, le côté du poligone régulier de vingt-quatre côtés inſcriptible au cercle X; l'on trouveroit de même le côté du poligone régulier de 48, de 96, &c. côtés.

PROBLÊME XI.

188. *Inſcrire par le moyen du rapporteur, dans un cercle donné, un poligone régulier quelconque.*

SOLUTION.

On commencera par chercher (n°. 177) la valeur de l'angle au centre dans le poligone régulier que l'on ſe propoſe d'inſcrire.

On fera enſuite avec le rapporteur (n°. 173) au centre du cercle donné, un angle d'une valeur égale à celle que l'on aura trouvée; la corde de l'arc que cet angle comprendra entre ſes côtés, ſera le côté du poligone régulier que l'on ſe propoſe d'inſcrire; portant cette corde ſur la circonférence, le poligone ſera inſcrit.

REMARQUE.

189. La ſolution que l'on vient de donner eſt une ſolution *méchanique*: les Géometres appellent ainſi toute ſolution dans laquelle on ne part point d'une propoſition démontrée pour déterminer ce que l'on cherche; dans le problême que l'on vient de réſoudre, on a déterminé le côté du poligone que l'on propoſoit d'inſcrire, en ſe ſervant préciſément du rapporteur, ſans recourir à quelque propoſition qui fixât la grandeur de ce côté, ou qui déterminât les circonſtances dans leſquelles ce côté devoit être tiré.

La Géométrie élémentaire nous laiſſe quelquefois ſans regles & ſans autre reſſource que ces ſolutions méchaniques qui plaiſent ſi peu à l'eſprit, parce que la main ſeule en fait les frais. Nous ſavons, par exemple, inſcrire géométriquement dans le cercle les figures régulieres de trois & quatre côtés, & toutes les

autres d'un nombre de côtés continuellement double; nous ſaurons encore bientôt inſcrire géométriquement les figures régulieres de cinq & quinze côtés, & dès-lors auſſi toutes les autres d'un nombre de côtés continuellement double, mais c'eſt tout.

S'agit-il d'inſcrire dans un cercle donné un poligone régulier de 7, 9, 11 côtés, ou tout autre poligone dont le nombre des côtés n'eſt ni 3, ni 4, ni 5, ni 15, ni l'un des continuellement doubles de ces nombres, l'on eſt réduit au tâtonnement ou aux inſtrumens qui, pour ces cas même, n'ont été faits qu'en tâtonnant. On trouvera dans la Géométrie compoſée des méthodes démontrées pour ces ſortes d'inſcriptions.

CHAPITRE QUATRIEME.

Les produits des lignes multipliées les unes par les autres, & par elles-mêmes.

Les produiſans des ſurfaces.

DÉFINITIONS.

190. On appellera *produiſans* d'une figure les lignes qu'il faudra multiplier pour avoir ſa ſurface.

191. Dans le triangle quelconque ABC, on nomme *hauteur* la perpendiculaire BH abaiſſée du ſommet B de ce triangle ſur la baſe AC prolongée, s'il eſt néceſſaire. *Fig.* 106 107.

192. Dans le parallélogramme quelconque ABCD, on nomme *baſe* le côté quelconque ſur lequel on conçoit que le parallélogramme eſt appuyé, & l'on appelle *hauteur* la perpendiculaire abaiſſée ſur la baſe prolongée, s'il eſt néceſſaire, de l'un quelconque des points du côté oppoſé à la baſe; par exemple, ſi dans le parallélogramme ABCD, on prend pour baſe le côté AB, la hauteur ſera la perpendiculaire DE, ou la perpendiculaire CF. *Fig.* 104

193. Un quadrilatere ABCD qui a deux de ſes côtés AB, DC paralleles, ſe nomme *trapezoïde*. *Fig.* 11

194. Le *ſecteur* du cercle eſt une portion AOCD du cercle, compriſe entre deux rayons AO, CO, & un arc ADC. *Fig.* 11

195. La ligne peut être conſidérée ou comme une grandeur *continue*, c'eſt-à-dire, comme la ſomme d'une infinité de points poſés les uns à la ſuite des autres.

Ou comme une grandeur *diſcrete*, c'eſt-à-dire, comme renfermant un certain nombre de meſures linéaires.

De même la ſurface peut être conſidérée ou comme une grandeur *continue*, c'eſt-à-dire, comme une ſomme indéterminée de lignes poſées les unes à côté des autres.

Ou comme une grandeur *diſcrete*, c'eſt-à-dire, comme renfermant un certain nombre de meſures ſuperficielles.

196. *Meſurer* une ligne ou une longueur, c'eſt chercher combien de fois elle contient une meſure linéaire déterminée à volonté ou par l'uſage.

Meſurer une ſurface, c'eſt déterminer le nombre des meſures ſuperficielles qu'elle renferme.

197. Les meſures linéaires les plus généralement connues, ſont la toiſe & ſes parties; ſavoir, le pied, le pouce, la ligne, &c. & la perche qui, à Paris, vaut trois toiſes.

Les *meſures ſuperficielles* les plus connues, ſont *l'arpent*, la *perche quarrée*, la *toiſe quarrée*, les parties régulieres de la toiſe quarrée; à ſavoir, le *pied quarré*, le *pouce quarré*, &c. Les parties irrégulieres de la toiſe quarrée; à ſavoir, la *toiſe-pied*, la *toiſe-pouce*, &c.

L'*arpent* eſt un quarré dont le côté renferme 10 perches.

La *perche quarrée* eſt un quarré dont le côté eſt une perche.

La *toiſe-quarrée* eſt un quarré dont le côté eſt une toiſe.

Le *pied-quarré* eſt un quarré dont le côté eſt un pied.

La *toiſe-pied* eſt un rectangle dont les côtés contigus ſont l'un une toiſe, & l'autre un pied.

198. On nomme *toiſé* l'art de meſurer les étendues avec la toiſe & les autres meſures relatives à la toiſe.

SECTION PREMIERE.

Les produits des lignes multipliées les unes par les autres, & par elles-mêmes.

ARTICLE PREMIER.

Expreſſion géométrique du produit de deux lignes multipliées l'une par l'autre, & du produit d'une ligne multipliée par elle-même.

199. PROPOSITION. 1°. *Si on multiplie l'une par l'autre deux droites* AB, AD, *le produit ſera un rectangle dont les côtés contigus ſeront les deux droites multipliées.* Fig. 9 n°. 1.

C'eſt-à-dire, que le produit AB × AD, ſera repréſenté géométriquement par le rectangle ABCD dont les côtés contigus AB, AD ſont les deux droites multipliées.

2°. *Si on multiplie une ligne par elle-même, le produit ſera un quarré qui aura pour côté la ligne multipliée.* Fig. 9 n°. 2.

C'eſt-à-dire, que AB × AB, ou $\overline{AB}$ eſt repréſenté par le quarré ABCD, dont chaque côté eſt égal à la droite AB.

PRÉPARATION.

Un moyen ſimple de démontrer la propoſition, c'eſt de faire les multiplications énoncées, & comparer enſuite les réſultats avec l'idée que l'on a donnée (n°. 23, 24) de rectangle & de quarré.

DÉMONSTRATION.

1°. Qu'à chaque point de la droite AD on éleve Fig. 9 n°. 1.

sur cette droite AD, du même côté, une perpendiculaire égale à la droite AB.

La droite AB sera, par cette construction, répétée autant de fois qu'il y a de points dans la droite AD; la surface ABCD formée de la somme des perpendiculaires élevées sur AD, représente donc le produit AB × AD.

Mais la surface ou le quadrilatere ABCD ayant, par la construction, ses côtés AB, BC, CD, AD perpendiculaires les uns aux autres, est un rectangle (n°. 23), les côtés contigus AB, AD de ce rectangle sont encore, par la construction, les deux droites multipliées.

Donc le produit AB × AD de deux droites AB, AD, est un rectangle ABCD dont les côtés contigus AB, AD sont les deux droites multipliées.

Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Fig. 92. p. 2. 2°. Que chaque point d'une droite AD égale à AB, l'on imagine sur AD une perpendiculaire égale à la droite AB, & du même côté de la droite AD.

Par cette construction la droite AB sera répétée autant de fois qu'il y aura de points dans la droite AD, ou autant de fois qu'elle renfermera elle-même des points, puisque l'on suppose AD = AB; la somme des perpendiculaires élevées sur AD, ou le quadrilatere ABCD, représentera donc le produit AB × AB, ou $\overline{AB}^2$.

Mais ce quadrilatere ABCD ayant, par la construction, ses angles droits, & les côtés contigus AD, AB égaux, est un quarré fait sur la droite multipliée AB (n°. 24).

Donc le produit AB × AB ou $\overline{AB}^2$ d'une droite AB multipliée par elle-même, est représenté par un quarré dont le côté est égal à la droite AB.

Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

CONSÉQUENCES.

200. Premiere. *On a la ſurface d'un rectangle* AC (1) *en multipliant l'un par l'autre ſes côtés contigus* AB, AD. Fig. 98. n°. 1.

Puiſque l'on vient de voir (n°. 199) que le rectangle AC n'eſt autre choſe que le réſultat de cette multiplication.

Et parce que les côtés contigus étant perpendiculaires l'un à l'autre, l'un, par exemple, AB étant pris pour la baſe du rectangle, l'autre AD en exprime la hauteur, on dira encore que *la ſurface du rectangle quelconque* AC *eſt égal au produit de ſa baſe* AB *multipliée par la hauteur* AD.

Il ſuit de cette premiere conſéquence :

201. 1°. *Que la ſurface d'un rectangle* AC, *dont les côtés contigus ou dont la hauteur & la baſe ſont* AD & AB, *peut être exprimé de cette ſorte* AC = AD × AB. Fig. 98 n°. 1.

202. 2°. *En diviſant la ſurface du rectangle par la hauteur de ce rectangle, le quotient repréſentera la baſe ; & en diviſant par la baſe, le quotient repréſentera la hauteur.*

Car en diviſant un produit quelconque de deux produiſans, par l'un de ſes deux produiſans, l'autre produiſant eſt repréſenté par le quotient.

203. 3°. *Les rectangles dont les côtés contigus ſeront égaux chacun à chacun, ſeront égaux ; c'eſt-à-dire, que leurs ſurfaces ſeront égales.*

Car, dans cette ſuppoſition, ces rectangles auront évidemment des produiſans égaux.

204. Seconde. *On a la ſurface du quarré en multipliant ſon côté par lui-même.*

(1) Pour abréger, l'on ſe contente de nommer les quadrilateres quelconques par deux lettres ; à ſavoir, celles qui déſignent les ſommets des angles oppoſés.

Puiſque le quarré fait ſur une droite n'eſt autre choſe que le produit de cette droite multipliée par elle-même (n°. 199).

Fig. 98. 205. D'où il ſuit, 1°. *qu'un quarré dont* AB *ſeroit le côté, peut être déſigné par* $\overline{AB}^2$.

n°. 2.

Puiſque cette expreſſion $\overline{AB}^2$ indique la multiplication de la droite AB par elle-même,

206. 2°. *En extrayant la racine quarrée de la ſurface du quarré, on trouvera le côté du quarré.*

Car extraire la racine quarrée de la ſurface d'un quarré, c'eſt déterminer la droite qui, multipliée par elle-même, a produit cette ſurface : or (n°. 199) cette droite eſt le côté même du quarré.

Par conſéquent, *pour exprimer le côté d'un quarré quelconque repréſenté par* $\overline{AB}^2$, *on pourra employer cette expreſſion* $\sqrt{\overline{AB}^2}$, *qui indique la racine quarrée de* $\overline{AB}^2$.

207. Troiſieme. *Si l'on multiplie l'un par l'autre deux nombres de meſures linéaires égales, le produit ſera un nombre de meſures ſuperficielles quarrées qui auront chacune pour côtés, la meſure linéaire du multiplicande ou du multiplicateur.*

Fig. 99. Si, par exemple, on multiplie une ligne AD de deux toiſes par une autre droite AB de trois toiſes, le produit 6 des deux nombres 2 & 3, exprimera que dans le rectangle ABCD de ces deux lignes, il y a 6 toiſes quarrées.

On ſait en effet (n°. 199) que le produit d'une droite multipliée par elle-même ou par ſon égale, eſt une ſurface quarrée qui a pour côté la droite multipliée.

Ainſi la premiere toiſe AE de la droite AD étant multipliée par chacune des trois toiſes AF, FG, HB contenues dans la droite AB, donnera ſucceſſivement les trois toiſes quarrées AG, FI, HK.

La

La ſeconde toiſe ED de la droite AD étant multipliée par chacune des trois mêmes toiſes AF, FG, HB, ou de leurs égales EG, GI, IK, donnera les trois autres toiſes quarrées EL, GM, IC.

Donc dans le rectangle ABCD, fait de la multiplication de la droite AD de deux toiſes par la droite AB de trois toiſes, il y a ſix toiſes quarrées; ce qui répond au produit 6 du nombre 2 des toiſes de la droite AD par le nombre 3 des toiſes de la droite AB.

En général, le produit de deux nombres de meſures linéaires égales, eſt un nombre de meſures ſuperficielles quarrées, dont chacune a pour côté la meſure linéaire que l'on a multipliée.

208. *Et par conſéquent ſi l'on multiplie par lui-même un nombre de meſures linéaires égales, le produit ſera un nombre de meſures ſuperficielles quarrées, dont chacune aura pour côté la meſure linéaire de la ligne multipliée.*

Car que l'on multiplie par lui-même un nombre de meſures linéaires égales, ou qu'on le multiplie par un nombre égal des mêmes meſures, le réſultat ſera évidemment le même.

Donc, puiſqu'en multipliant l'un par l'autre deux nombres de meſures linéaires égales, le produit eſt un nombre de meſures quarrées dont chacune a pour côté la meſure linéaire multipliée (n°. 207).

De même en multipliant par lui-même un nombre de meſures linéaires égales, le produit ſera un nombre de meſures quarrées dont chacune aura pour côté la meſure linéaire que l'on aura multiplié.

Par exemple, une ligne de 6 pieds multipliée par elle-même, donnera 36 pieds quarrés, & une droite de 12 pouces, multipliée par elle-même, donnera 144 pouces quarrés.

209. 4°. *Si on multiplie une meſure linéaire quelcon-*

que par des meſures linéaires de différentes valeurs, le produit ſera un nombre de rectangles qui auront pour hauteur la meſure linéaire du multiplicande, & pour baſes les meſures linéaires inégales du multiplicateur.

199. Si l'on multiplie, par exemple, une toiſe AD par un pied AE, par un pouce EG, par une ligne GB.

Le produit AD × AE, ſera une toiſe-pied; c'eſt-à-dire, un rectangle AF dont les côtés contigus ſeront la toiſe AD, & le pied AE.

200. Le produit AD × EG, ſera une toiſe-pouce; c'eſt-à-dire, un rectangle EH, dont les côtés contigus ſeront la toiſe AD ou EF, & le pouce EG.

Le produit AD × GB, ſera une toiſe-ligne; c'eſt-à-dire, un rectangle GC, dont les côtés contigus ſeront la toiſe GH ou AD, & la ligne GB.

Ceci n'eſt évidemment qu'une application de cette propoſition générale (n°. 199) : *Le produit de deux lignes multipliées l'une par l'autre eſt un rectangle qui a pour côtés contigus les deux lignes multipliées.*

ARTICLE II.

Valeur du quarré de la ſomme de deux lignes, & celle du quarré de la différence de deux lignes, relativement à ces lignes.

Valeur du rectangle de deux lignes inégales, relativement à la ſomme & à la différence de ces lignes.

201. 210. PROPOSITION. *Le quarré de la ſomme* AB *de deux droites* AF, FB, *eſt égal à la ſomme des quarrés des droites* AF, FB, *& de deux rectangles qui ont chacun ces deux droites pour côtés contigus.*

Ce que l'on peut exprimer ainſi $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 + 2AF \times FB$.

202. *Le quarré de la différence* AF, *de deux droites* AB, FB,

eſt égal à la ſomme des quarrés des droites AB, FB, *moins deux rectangles qui ont chacun les droites* AB, FB *pour côtés contigus.*

Ce que l'on peut exprimer ainſi $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{FB}^2 - 2AB \times FB$.

Le rectangle de deux droites inégales AD, DB, *eſt égal au quarré de la moitié de leur ſomme, moins le quarré de leur demi-différence.* Fig. 10

En portant AD ſur DB de B en E, & en coupant DE en deux également en E pour avoir AC ou AD + DC moitié de AD + DB, & CD moitié de la différence des mêmes droites AD, DB.

Il faudra démontrer $AD \times DB = \overline{AC}^2 - \overline{CD}^2$.

PRÉPARATION.

On pourroit, en employant le calcul, donner une démonſtration bien ſimple de cette propoſition; par exemple, pour la premiere partie, où l'on ſuppoſe que AB eſt la ſomme de AF & FB, voici comme l'on pourroit raiſonner :

Puiſque l'on a . . . . $AB = AF + FB$.

Elevant chaque membre au quarré, l'on aura $\overline{AB}^2 =$ le quarré de AF + FB.

Mais le quarré de AF + FB, eſt $\overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 + 2AF \times FB$.

Ce que l'on trouve en multipliant AF + FB par lui-même.

Donc . . . . $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 + 2AF \times FB$.

On démontreroit auſſi aiſément la ſeconde & la troiſieme partie; mais ſans recourir au calcul, il ſuffira d'appliquer la propoſition précédente (n°. 199).

DÉMONSTRATION.

Premiere Partie.

A ſavoir que $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 + 2AF \times FB$.

Soit fait ſur AB le quarré AC, & ayant pris ſur le
101. côté AD de ce quarré la partie AE égale à la droite donnée AF, ou la partie DE égale à l'autre droite donnée FB, ſoient élevées ſur AB au point F la perpendiculaire FH terminée à la rencontre du côté oppoſé CD, & ſur AD au point E la perpendiculaire EI terminée à la rencontre du côté oppoſé BC.

101. A cauſe des perpendiculaires FH, EI, les quadrilateres AG, GC, DG, GB, dans leſquels le quarré AC de la ſomme AC des deux droites AF, FB, eſt diviſé, ſont des rectangles (n°. 23).

Parce que AE = AF par la conſtruction, le rectangle AG eſt le quarré de la premiere droite AF (n°. 199) déſigné par $\overline{AF}^2$.

Parce que dans le rectangle GC les côtés contigus HG, GI ſont égaux aux parties égales DE, FB, ce rectangle GC eſt le quarré de la ſeconde droite FB déſigné par $\overline{FB}^2$.

Parce que dans le rectangle DG le côté DE = FB par la conſtruction, & EG = AF comme côtés du quarré AG, ce rectangle DG eſt le rectangle déſigné par AF × FB (n°. 199).

Parce que dans le rectangle GB qui a pour côtés contigus FB, GF, le côté GF = AF, ce rectangle GB eſt encore un rectangle déſigné par AF × FB.

Donc le quarré AC de la ſomme AB des deux droites AF, FB, renferme le quarré de la premiere droite AF, le quarré de la ſeconde droite FB, & deux rectangles qui ont chacun leurs côtés contigus égaux aux deux droites AF, FB.

C'eſt-à-dire, que $\overline{AB}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FB}^2 + 2AF \times FB$.
Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

Seconde Partie.

Dans laquelle il faut faire voir que $\overline{AF}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{FB}^2 - 2AB \times FB$. Fig. 1

C'eſt-à-dire, que *le quarré de la différence* AF *de deux droites* AB, FB *données, eſt égal à la ſomme des quarrés de ces deux droites, moins deux rectangles qui ont chacun leurs côtés contigus égaux à ces deux droites.*

Soit fait ſur la plus grande AB des deux droites données le quarré AC, & ayant pris ſur le côté AD la partie AE égale à la différence AF de ces mêmes droites; ſoit achevé le quarré AG de cette différence, ayant prolongé le côté GF d'une quantité FN égale à la ſeconde droite FB donnée, & le côté CB d'une quantité BM égale auſſi à FB, ſoit menée la droite NM pour avoir FM quarré de FB. Fig. 1

Il eſt évident que ſi de la ſurface AFNMCDA compoſée des quarrés FM, AC des droites FB, AB données, on retranche le quarré AG de la différence AF des deux droites données, il reſtera l'équerre EGNMCDE.

Prolongeant le côté EG du quarré AG à la rencontre du côté BC du quarré AC, l'équerre EGNMCDE ſera décompoſée en deux rectangles DI, GM.

Le rectangle DI ayant pour côtés contigus EI = AB comme côtés oppoſés du rectangle AI, & DE = FB, parce que AB = AD comme côté de quarré, & AF = AE par la conſtruction, ce rectangle DI repréſentera (n°. 199) AB × FB.

Le rectangle GM ayant pour côtés contigus MN = FB comme côtés du quarré FM, & GN = AB, parce que

GF = AF, & FN = FB, ce rectangle GM représentera AB × FB.

Ainſi l'équerre EGNMCDE = 2 AB × FB; & comme cette équerre eſt l'excès de la ſomme des quarrés AC, FM ſur le quarré AG, ou l'excès de la ſomme des quarrés $\overline{AB}$, $\overline{FB}$ ſur $\overline{AF}$.

On conclura $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{FB} - 2AB \times FB$.

Ce qu'il falloit 2°. *démontrer.*

Troiſieme Partie.

Fig. 103. Dans laquelle il faut faire voir que $AD \times DB = \overline{AC} - \overline{CD}$.

C'eſt-à-dire, que le rectangle de deux droites AD, DB *inégales, eſt égale au quarré de* AC *moitié de leur ſomme, moins le quarré de* CD *moitié de leur différence.*

Soit fait ſur AC le quarré AF, & ayant pris ſur le côté CF de ce quarré la partie CH égale à la demi-différence CD des deux droites données AD, DB, ſoit achevé le quarré CI de cette demi-différence.

Il eſt viſible que ſi du quarré AF de la demi-ſomme AC des droites données AD, DB, on retranche le quarré CI de la demi-différence CD de ces mêmes droites, il reſtera la ſurface ADIHFGA.

Prolongeant le côté DI du quarré CI à la rencontre du côté GF du quarré AF, la ſurface ADIHFGA ſera décompoſée dans les deux rectangles AL, IF.

Le rectangle AL qui a pour côtés contigus AG = AC & AD, repréſentera (n°. 199) AD × AC.

Le rectangle IF qui a pour côtés contigus IH = CD, & HF = AD, parce que CF = AC & CD = CH comme côtés de quarrés, repréſentera AD × CD.

Par conſéquent la ſurface ADIHFGA repréſen-

tera $AD \times AC + AD \times CD$; ou $AD \times \overline{AC + CD}$; ou $AD \times \overline{BC + CD}$ (parce que AC & BC ſont l'une & l'autre la moitié de AB ſomme des deux droites AD, DB) ; ou enfin $AD \times DB$, parce que $BC + CD = DB$.

Et comme
l'on a trouvé $ADIHFCA = AF - CI$, ou $= \overline{AC} - \overline{CD}$
on conclura . . . $AD \times DB = \overline{AC} - \overline{CD}$.

Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

REMARQUE.

211. On auroit pu donner à la propoſition que l'on vient de démontrer, cet autre énoncé.

1°. Une droite AB étant diviſée en deux parties quelconques AF, FB le quarré de la droite entiere AB ſera compoſé du quarré de chacune de ſes parties AF, FB, & de deux rectangles qui auront chacun pour côtés contigus les deux parties AF, FB. *Fig.* 101.

Puiſque l'on a démontré $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB} + 2AF \times FB$.

2°. Une droite AB étant diviſée en deux parties quelconques AF, FB, le quarré de l'une AF de ces parties eſt égal au quarré de la ligne entiere AB, plus au quarré de l'autre partie FB, moins deux rectangles qui ont chacun pour côtés contigus la droite entiere AB, & l'autre partie FB. *Fig.* 102.

Puiſque l'on a démontré $\overline{AF} = \overline{AB} + \overline{FB} - 2AB \times FB$.

3°. Une droite AB étant coupée en deux parties égales au point C, & en deux parties inégales au point B, le rectangle des deux parties inégales AD, DB eſt égal au quarré de la moitié AC de la droite AB, moins le quarré de la partie CD compriſe entre les points de diviſion. *Fig.* 103.

Puiſque l'on a démontré $AD \times DB = \overline{AC} - \overline{CD}$.

SECTION II.

Les produiſans des ſurfaces.

ARTICLE PREMIER.

Les produiſans du parallélogramme, du triangle & du trapézoïde.

PROPOSITION I.

Fig. 104. 212. *LE parallélogramme eſt égal à un rectangle de même baſe & de même hauteur que lui.*

Etant donné, par exemple, le parallélogramme ABCD, ſi des extrêmités D, C du côté DC oppoſé à la baſe AB, on abaiſſe ſur cette baſe prolongée les perpendiculaires DE, CF, ce qui donnera le rectangle DF de même hauteur DE que le parallélogramme ABCD, & dont la baſe EF ſera encore égale à la baſe AB du parallélogramme, puiſque EF = DC comme côtés oppoſés du rectangle, & DC = AB comme côtés oppoſés du parallélogramme; il faudra démontrer que le parallélogramme AC eſt égal au rectangle DF.

PRÉPARATION.

Le parallélogramme AC & le rectangle DF ayant, par la conſtruction, la partie commune EBCD, il eſt évident que leur égalité dépend de celle des triangles ADE, BCF; or on déduira aiſément l'égalité de ces triangles des conditions de la propoſition.

DÉMONSTRATION.

Deux triangles ſont entiérement égaux lorſque les trois côtés de l'un ſont égaux aux trois côtés de l'autre chacun à chacun (n°. 58).

Or dans les triangles ADE, BCF, les côtés DE & CF ſont égaux comme côtés oppoſés du rectangle DF (n°. 23). *Fig.* 10

Les côtés AD, BC ſont égaux comme côtés oppoſés du parallélogramme AC (n°. 21).

Les baſes AB, EF du parallélogramme & du rectangle étant ſuppoſées égales, ſi on en retranche la partie EB qui leur eſt commune, il reſtera AE = BF.

Donc le triangle ADE eſt égal au triangle BCF.

Donc le triangle ADE + la partie commune EBCD = le triangle BCF + la partie commune EBCD.

C'eſt-à-dire, que le parallélogramme AC & le rectangle DF de même baſe & de même hauteur ſont égaux; ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

213. *Premiere.* On ſait (n°. 200) que la ſurface du rectangle a pour produiſans la hauteur du rectangle & ſa baſe; on vient de démontrer (n°. 212) que le parallélogramme quelconque eſt égal à un rectangle de même baſe & de même hauteur que lui.

Donc *la ſurface du parallélogramme a auſſi pour produiſans la baſe & la hauteur du parallélogramme.*

Et par conſéquent un parallélogramme ABCD dont la hauteur eſt DE, & dont la baſe eſt AB, eſt l'expreſſion géométrique du produit AB × DE.

214. Seconde. *Les parallélogrammes* ABCD, ABEF *qui ont même baſe* AB, *& qui ſont compris entre les mêmes paralleles* AB, CE, *ou qui ont des baſes égales & des hauteurs égales*, ſont égaux. *Fig.* 10

Car les produiſans de ces parallélogrammes (à ſavoir les hauteurs & les baſes) étant égaux par la ſuppoſition, les produits de ces produiſans, c'eſt-à-dire les parallélogrammes mêmes, ſeront évidemment égaux.

PROPOSITION II.

§. 106. 215. *Un triangle quelconque* ABC *eſt la moitié d'un parallélogramme de même baſe & de même hauteur que lui.*

PRÉPARATION.

On ſe rappellera la fonction de la diagonale dans le parallélogramme (n°. 59), & on en déduira aiſément la démonſtration qui ſuit.

DÉMONSTRATION.

Soit par le ſommet B du triangle ABC menée la parallele BD à la baſe AC de ce triangle, & par le ſommet de l'angle C ſoit encore menée la parallele CD au côté AB.

Il réſultera de cette conſtruction un parallélogramme AD de même baſe AC, & de même hauteur BH que le triangle ABC, & qui aura le côté BC de ce triangle pour diagonale.

Mais cette diagonale BC diviſe le parallélogramme AD en deux triangles ABC, BCD entiérement égaux (n°. 59).

Donc le triangle ABC de même hauteur & de même baſe que le parallélogramme AD, eſt la moitié de ce parallélogramme.

CONSÉQUENCES.

216. Puiſque le parallélogramme a pour produiſant ſa hauteur & ſa baſe (n°. 213), & que l'on vient de voir que le triangle eſt la moitié du parallélogramme de même baſe & de même hauteur que ce triangle.

Le triangle a donc pour produiſans ſa hauteur & la moitié de ſa baſe, ou ſa baſe & la moitié de ſa hauteur,

Ou plus ſimplement, *le triangle eſt la moitié du produit de ſa hauteur multipliée par ſa baſe.* Fig. 106.

Par conſéquent un triangle ABC dont la baſe eſt AC, & dont la hauteur eſt BH, eſt l'expreſſion géométrique du produit $\frac{AC \times BH}{2}$.

217. D'où il ſuit, 1°. *qu'un triangle quelconque* ABC *eſt égal à un parallélogramme* DC *de même hauteur* BH *que ce triangle, & dont la baſe* EC *n'eſt que la moitié de la baſe* AC *du triangle.* Fig. 107.

Car ce parallélogramme & ce triangle ſeront, dans cette ſuppoſition, repréſentés chacun par le même produit $\frac{BH \times AC}{2}$.

218. 2°. *Un triangle quelconque* ABC *eſt égal à un parallélogramme* EC *de même baſe* AC *que ce triangle, & dont la hauteur* PH *n'eſt que la moitié de la hauteur* BH *du triangle.* Fig. 108.

Car ce parallélogramme & ce triangle ſeront, dans cette ſuppoſition, repréſentés chacun par le même produit $\frac{AC \times BH}{2}$.

219. 3°. *Les triangles quelconques* ACB, ADB *qui ont même baſe* AB, *& qui ſont renfermés entre les mêmes paralleles* AB, CD *ſont égaux.* Fig. 109.

En général, les triangles qui ont des baſes égales & des hauteurs égales ſont égaux.

Car dans cette ſuppoſition les produiſans de la ſurface de chacun de ces triangles ſeront égaux aux produiſans de la ſurface de chaque autre.

220. 4°. *Pluſieurs triangles* ABC, CDE, EFG *de même hauteur, ou renfermés entre les mêmes paralleles* AG, BF, *ſont enſemble égaux à un triangle* ABG *qui a la même hauteur* BH *que ces triangles, & dont la baſe* AG *eſt égale à la ſomme* AC + CE + EG *des baſes des mêmes triangles.* Fig. 110.

En effet, puiſque la ſurface du triangle eſt la moitié du produit de la baſe par la hauteur (n°. 216), on aura . . ſurf. triangle $ABC = BH \times \frac{AC}{2}$

ſurf. triangle $CDE = BH \times \frac{CE}{2}$

ſurf. triangle $EFG = BH \times \frac{EG}{2}$

Et en ajoutant enſemble les triangles, il viendra triangle

$$ABC + CDE + EFG = BH \times \frac{AC}{2} + BH \times \frac{CE}{2} + BH \times \frac{EG}{2}$$

$$= BH \times \frac{AC + CE + EG}{2}$$

$$= BH \times \frac{AG}{2}, \text{ parce que l'on ſuppoſe}$$

$AG = AC + CE + EG$.

Mais l'on aura encore (n°. 216) triangle . . . . . $ABG = BH \times \frac{AG}{2}$.

Donc triangle $ABC + CDE + EFG$ = triangle ABG.

PROPOSITION III.

Fig. 111. 221. *La ſurface d'un trapézoïde quelconque* ABCD *eſt égal à un triangle qui auroit pour hauteur la diſtance des côtés paralleles* AB, CD, *c'eſt-à-dire, la perpendiculaire menée entre ces côtés, & dont la baſe ſeroit égale à la ſomme des mêmes côtés paralleles.*

PRÉPARATION.

Ce qui caractériſe le trapézoïde, c'eſt d'avoir deux côtés paralleles (n°. 193).

Ce parallélisme donnera lieu à l'application de cette vérité générale (n°. 220).

Pluſieurs triangles de même hauteur ſont égaux enſemble à un ſeul triangle qui auroit la même hauteur que ces triangles, & dont la baſe ſeroit la ſomme des baſes des mêmes triangles.

DÉMONSTRATION.

Soit menée dans le trapézoïde ABCD la diagonale CD pour le décompoſer dans les triangles ACB, CAD.

Prenant pour baſes les côtés paralleles AB, DC, ces triangles ACB, CAD auront chacun pour hauteur la diſtance AE ou CF des côtés paralleles.

La ſomme de ces deux triangles ou le trapézoïde ABCD ſera donc (n°. 220) égale à un triangle qui auroit pour hauteur la diſtance AE ou CF des côtés paralleles AB, DC, & pour baſe la ſomme des mêmes côtés paralleles.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

222. *Les produiſans de la ſurface du trapézoïde ſont donc la diſtance des côtés paralleles, c'eſt-à-dire, la perpendiculaire menée entre ces côtés, & la moitié de la ſomme des mêmes côtés paralleles.*

Puiſque (n°. 216) le triangle auquel on vient de démontrer que le trapézoïde eſt égal auroit ces mêmes produiſans.

ARTICLE II.

Les produiſans de la ſurface des poligones.

223. PROPOSITION. *Un poligone régulier quelconque* ABCDE, *eſt égal à un triangle* AON *dont la hauteur eſt l'apotheme* OH *de ce poligone, & dont la baſe* AN *eſt égale au contour* AB + BC + CD + DE + EA *du même poligone.* Fig. 112

PRÉPARATION.

On ſait que les rayons obliques diviſent le poligone

régulier en des triangles entiérement égaux (n°. 60); on ſait encore (n°. 220) que pluſieurs triangles de même hauteur ſont égaux enſemble à un ſeul triangle de même hauteur, dont la baſe ſeroit égale à la ſomme des baſes de ces triangles : la propoſition à démontrer ne ſera qu'une application de ces deux vérités.

DÉMONSTRATION.

§. 112. Du centre O ſoient menés des rayons OA, OB, &c. à tous les angles du poligone régulier ABCDE, les triangles AOB, BOC, COD, &c. dans leſquels ce poligone régulier ſera décompoſé, ſeront entiérement égaux; & par conſéquent la ſomme de tous ces triangles, où le poligone régulier ſera égal à l'un quelconque AOB de ces triangles pris autant de fois qu'il y a de ces triangles, ou que le poligone a de côtés.

§. 112. Mais le triangle AOB ayant un côté AB du poligone pour baſe, & l'apotheme OH du poligone pour hauteur, la ſomme d'autant de triangles AOB qu'il y a de côtés dans le poligone, eſt égale (n°. 220) à un triangle AON qui a l'apotheme OH pour hauteur, & dont la baſe AN eſt égale au côté AB pris autant de fois que le poligone a de côtés; ce qui eſt une baſe égale à la ſomme des côtés AB, BC, CD, DE, EA du poligone, parce que les côtés du poligone régulier ſont égaux entr'eux (n°. 26).

Donc la ſurface du poligone régulier quelconque ABCDE eſt égale à un triangle AON dont la hauteur eſt l'apotheme OH, & dont la baſe AN eſt égale au contour du poligone. *Ce qu'il falloit démontrer.*

CONSÉQUENCES.

224. Premiere. *Les produiſans de la ſurface du poligone régulier, ſont la moitié de l'apotheme de ce po-*

ligone, & ſon contour, ou l'apotheme & la moitié du contour.

Car le poligone régulier étant égal à un triangle qui a pour hauteur l'apotheme du poligone, & pour baſe le contour du même poligone (n°. 223), il eſt viſible qu'il doit avoir les mêmes produiſans que ce triangle.

Or ce triangle a pour produiſans (n°. 216) la moitié de ſa hauteur & ſa baſe, ou la moitié de ſa baſe & ſa hauteur; ce qui eſt la moitié de l'apotheme, & le contour du poligone, ou l'apotheme & la moitié du contour.

Donc, &c.

225. Seconde. *La ſurface d'un cercle quelconque* X *eſt égale à un triangle* AON, *qui a pour hauteur le rayon* OA *du cercle, & pour baſe une droite* AN, *égale au développement de la circonférence du même cercle* (*a*). Fig. 113.

Car ſi on conçoit la circonférence du cercle X, diviſée en une infinité de parties égales, les cordes qui ſoutiendront ces petits arcs, formeront évidemment un poligone régulier d'une infinité de côtés inſcrit au cercle X.

Mais ces arcs étant infiniment petits, les cordes qui les ſoutiennent ſont de même infiniment petites, & ſe confondent avec eux.

Ainſi le poligone formé par ces cordes, ne differe point du cercle X auquel il eſt inſcrit. Son contour eſt la circonférence même de ce cercle, & il a le rayon AO de ce cercle pour apotheme.

(*a*) On auroit donc la quadrature du cercle, c'eſt-à-dire, une figure rectiligne égale à la ſurface d'un cercle, ſi l'on pouvoit trouver une ligne droite égale à la circonférence dont on connoît le rayon; ce problême ne ſera peut-être jamais réſolu, mais on a des moyens de rectifier la circonférence avec autant de juſteſſe que nos beſoins peuvent l'exiger; on donnera ces moyens dans la ſuite.

Par conſéquent le cercle X peut être regardé comme la limite, & le plus grand des poligones réguliers qu'on peut lui inſcrire, & qui a le rayon AO pour apotheme.

Et comme un poligone régulier quelconque (n°. 223) eſt égal à un triangle qui a pour hauteur l'apotheme, & pour baſe une droite égale au contour de ce poligone.

Le cercle X eſt auſſi égal à un triangle AON, dont la hauteur eſt le rayon AO du cercle, & dont la baſe AN eſt une droite égale au développement de la circonférence de ce même cercle.

226. Troiſieme. *Les produiſans de la ſurface du cercle ſont la moitié du rayon & la circonférence, ou le rayon & le moitié de la circonférence.*

Puiſque (n°. 216) le triangle, auquel on vient de voir que la ſurface du cercle eſt égale, a ces mêmes produiſans.

227. Quatrieme. *La ſurface d'un ſecteur quelconque* AOCD *de cercle, eſt égale à un triangle* AOB, *qui a pour hauteur le rayon* AO *du ſecteur, & dont la baſe* AB *eſt égale au développement de l'arc* ADC *du même ſecteur.* Fig. 113.

Car en ſe rappellant la génération du cercle (n°. 31), on conçoit aiſément que le ſecteur AOCD eſt au cercle entier X, ce que l'arc ADC du ſecteur eſt à la circonférence entiere du cercle X; enſorte que ſi l'arc ADC étoit la moitié, ou le tiers ou le quart de la circonférence, le ſecteur AOCD ſeroit la moitié, ou le tiers ou le quart du cercle X.

Or la ſurface du cercle X eſt égale à un triangle AON qui a pour hauteur le rayon OA de ce cercle, & dont la baſe AN eſt égale au développement de la circonférence du même cercle (n°. 225)

Donc la ſurface du ſecteur AOCD eſt auſſi égale

à

à un triangle AOB qui a pour hauteur le rayon AO, & dont la base est la moitié, ou le tiers ou le quart du développement AN de la circonférence; ou dont la base est en général une droite AB égale au développement de l'arc ADC du secteur.

228. Par conséquent, *la surface du secteur de cercle a pour produisans le rayon & la moitié d'une droite égale au développement de l'arc du secteur, ou la moitié du rayon & le développement entier de l'arc du secteur.*

Cela est évident, puisque le triangle auquel la surface du secteur est égale, a ces mêmes produisans.

REMARQUES.

I.

229. Comme toute figure rectiligne ABCD, &c. peut se décomposer en autant de triangles qu'elle a de côtés, en menant d'un point O, pris dans l'intérieur de cette figure, des droites aux sommets de tous les angles; *Fig.* 114.

Ou en autant de triangles moins un qu'elle a de côtés, en menant d'un point O, pris sur l'un AE des côtés, des droites aux sommets des angles; *Fig.* 115.

Ou en autant de triangles moins deux qu'elle a de côtés, en menant du sommet O de l'un des angles des droites aux sommets des autres angles; *Fig.* 116.

Il est évident que l'on aura la surface d'une figure rectiligne quelconque, en décomposant cette figure en triangles, & en mesurant chacun de ces triangles.

II.

Lorsqu'un polygone est terminé par des lignes droites HA, AB, BC, CD, & par des lignes courbes HGF, FED que l'on puisse prendre pour des arcs de cercle, il est visible qu'en soutendant ces arcs par des *Fig.* 117.

cordes HF, FD, & en menant du ſommet de l'un quelconque C des angles des droites aux ſommets des autres angles, la ſurface du poligone propoſé ABCDEFGH ſera compoſée de triangles & de ſegmens HGFH, FEDF.

III.

Lorſqu'un poligone ABCDEFH ſera terminé par des lignes droites AB, BC, CD, & par des courbes DEF, FHA que l'on ne pourra pas prendre pour des arcs de cercle, & d'une courbure peu ſenſible; on coupera ces côtés courbes FED, FHA en des parties FE, ED, FH, HA que l'on puiſſe prendre pour des lignes droites, en menant du ſommet C de l'un des angles des droites aux points E & H des diviſions & aux ſommets des autres angles, le poligone propoſé ABCDEFH pourra être conſidéré comme compoſé ſeulement de triangles.

Fig. 118.

CHAPITRE CINQUIEME.

Application du Chapitre quatrieme.

LE TOISÉ DES SURFACES.

PROBLÊME I.

130. *MESURER une ſurface dont on connoît les produiſans en toiſes & en parties de la toiſe.*

PRÉPARATION.

L'opération par laquelle on déterminera la valeur d'une ſurface dont on connoît les produiſans en toiſes & en parties de la toiſe, n'eſt autre choſe qu'une multiplication compoſée qui ſe fait par le moyen des parties aliquotes. Avant que d'appliquer cette méthode à des exemples, il ſera bon de faire connoître 1°. les différentes ſuppoſitions que l'on peut faire touchant les unités des produiſans donnés; 2°. l'eſpece des unités du produit ou de la ſurface, relativement aux unités de ſes produiſans; 3°. la diviſion de la toiſe quarrée en ſes parties régulieres & irrégulieres.

1°. Les principales ſuppoſitions que l'on peut faire touchant les unités des produiſans d'une ſurface ſont celles-ci.

L'un des produiſans étant un nombre de toiſes, pieds & pouces, l'autre pourra être ou un nombre incomplexe de toiſes exprimé par un ſeul chiffre;

Ou un nombre incomplexe de toiſes exprimé par pluſieurs chiffres;

Ou un nombre complexe de toiſes & de parties de toiſes.

C'eſt dans la ſolution de ces cas particuliers que conſiſtera celle du problême propoſé.

2°. On ſait (n°. 209) qu'une toiſe multipliée ſucceſſivement par une toiſe, par un pied, par un pouce, donne ſucceſſivement une toiſe quarrée, une toiſe-pied, une toiſe-pouce, &c.

Ainſi lorſque les produiſans d'une figure ſeront l'un un nombre complexe de toiſes, pieds & pouces, & l'autre un nombre incomplexe de toiſes;

Les unités de la ſurface ou du produit qui réſultera de la multiplication de ces produiſans, ſeront des toiſes quarrées, des toiſes-pieds & toiſes-pouces, &c.

Et lorſque les produiſans de la figure ſeront tous les deux des nombres complexes de toiſes, pieds & pouces, &c. la ſurface pourra être encore exprimée par un nombre de toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c.

Il ſuffira pour cela de regarder le nombre de pieds qui ſera au multiplicateur comme une ou pluſieurs parties aliquotes de la toiſe, & de prendre enſuite pour le produit du multiplicande par ce nombre de pieds, des parties aliquotes ſemblables du nombre de toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. qui réſulte en ſuppoſant le multiplicande multiplié par une toiſe.

On regardera enſuite le nombre des pouces qui ſeront au multiplicateur comme une ou pluſieurs aliquotes, du nombre des pieds par leſquels on aura multiplié. Et ainſi de ſuite.

3°. Quant à la diviſion de la toiſe quarrée dans ſes parties régulieres qui ſont le pied quarré, le pouce quarré, la ligne quarrée, &c. & dans ſes parties irrégulieres qui ſont la toiſe-pied, la toiſe-pouce, la toiſe-ligne, &c.

On ſe rappellera d'abord (n°. 208) qu'un nombre de meſures linéaires égales, multiplié par lui-même, donne au produit un nombre de meſures quarrées dont chacune a pour côtés la meſure linéaire multipliée.

Et l'on conclurra que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés, puiſqu'en multipliant par lui-même le nombre 6 pieds que vaut la toiſe linéaire, le produit eſt 36.

Le pied quarré contient 144 pouces quarrés, puiſqu'en multipliant par lui-même le nombre 12 pouces que vaut le pied linéaire, le produit eſt 144.

Le pouce quarré contient 144 lignes quarrées, puiſqu'en multipliant par lui-même le nombre 12 lignes que vaut le pouce linéaire, le produit eſt 144, &c.

On ſe rappellera enſuite (n°. 209) qu'une toiſe étant multipliée par un pied, par un pouce, par une ligne, donne une toiſe-pied, une toiſe-pouce, une toiſe-ligne, & l'on conclurra que,

La toiſe quarrée, qui eſt une toiſe multipliée par une toiſe ou par chacun des ſix pieds qui compoſent la toiſe linéaire, contient 6 toiſes-pieds.

La toiſe-pied, qui eſt une toiſe multipliée par un pied, ou par chacun des 12 pouces que contient le pied linéaire, renfermera 12 toiſes-pouces.

Et comme la toiſe-pied eſt la ſixieme partie de la toiſe quarrée qui vaut 36 pieds quarrés, on dira encore que la toiſe-pied vaut 6 pieds.

La toiſe-pouce, qui eſt une toiſe multipliée par un pouce ou par chacune des 12 lignes que contient le pouce linéaire, renferme 12 toiſes-lignes.

Et comme la toiſe-pouce eſt la douzieme partie de la toiſe-pied qui vaut 6 pieds quarrés, la toiſe-pouce vaut $\frac{1}{2}$ pied quarré.

La toiſe-ligne, qui eſt une toiſe multipliée par une

ligne ou par chacun des 12 points que contient la ligne, renferme 12 toiſes-points ou primes.

Et comme la toiſe-ligne eſt la douzieme partie de la toiſe-pouce qui vaut $\frac{1}{2}$ pied quarré, ou 72 pouces quarrés, la toiſe-ligne vaut 6 pouces quarrés.

On démontrera de la même façon que la toiſe-prime contient 12 toiſes-ſecondes, & vaut $\frac{1}{2}$ pouce quarré; & ainſi des autres unités inférieures.

La Table qui ſuit fera connoître les unités relatives à la toiſe linéaire & à la toiſe quarrée, avec les caracteres qui les déſignent.

Meſures linéaires.

La toiſe, s'exprime par T, & vaut 6 pieds.
Le pied . . . . P . . 12 pouces.
Le pouce . . . . *p* . . 12 lignes.
La ligne . . . . L . . 12 primes.
Le point ou la prime I. . . 12 ſecondes.
&c.

Meſures ſuperficielles.

La toiſe quarrée	TT	36 pieds quarrés, ou 6 toiſes-pieds.
Le pied quarré	PP	144 pouces quarrés.
Le pouce quarré	*pp*	144 lignes quarrées.
La ligne quarrée	LL	144 primes quarrées.
La toiſe-pied . .	TP	12 toiſes-pouces, ou 6 pieds quarrés.
La toiſe-pouce	T*p*	12 toiſes-lignes, $\frac{1}{2}$ pied quarré.
La toiſe-ligne	TL	12 toiſes-primes, 6 pouces quarrés.
La toiſe-prime	TI	12 toiſes-ſecondes, $\frac{1}{2}$ pouce quarré.
La toiſe-ſeconde	T″	12 toiſes-tierces, 6 lignes quarrées.
La toiſe-tierce	T‴	12 toiſes ″″, $\frac{1}{2}$ ligne quarrée.

PREMIER CAS DU PROBLÊME I.

231. *Meſurer une ſurface dont l'un des produiſans eſt un nombre complexe de toiſes, pieds & pouces, &c.*

& l'autre eſt un nombre incomplexe de toiſes exprimé par un ſeul chiffre.

SOLUTION.

Pour plus grande facilité on prendra pour multiplicateur le produiſant qui ne renferme que des toiſes, & pour multiplicande le nombre complexe de toiſes & de parties de la toiſe.

On fera la multiplication en commençant par les plus petites meſures linéaires du multiplicande; & allant de ſuite aux autres, on obſervera de réduire les meſures ſuperficielles qui réſulteront de chaque multiplication particuliere, aux meſures ſuperficielles immédiatement plus grandes qu'elles renferment.

EXEMPLE.

Meſurer une ſurface dont un produiſant contient . . . . . $8^{T}. 5^{P}. 8^{L}. 9^{L}.$

& l'autre . . . . . 2.

Produit ou ſurface demandée $17^{TT}. 5^{TP}. 5^{TP}. 6^{TL}.$

OPÉRATIONS.

Prenant pour multiplicateur le produiſant qui ne contient que 2 toiſes, on multipliera ſucceſſivement par ces 2 toiſes, les lignes, les pouces, les pieds & les toiſes du multiplicande, de cette ſorte.

1°. On multipliera 9^{L} par 2^{T}, ce qui produira 18 toiſes-lignes qui ſont 1 toiſe-pouce, & 6 toiſes-lignes; l'on écrira 6^{TL} ſous les lignes, & l'on retiendra 1^{TP} pour l'ajouter aux toiſes-pouces que l'on va former.

2°. On multipliera 8^{P} par 2^{T}, ce qui produit 16 toiſes-pouces, leſquelles ajoutées à 1^{TP} que l'on vient de retenir, font 17 toiſes-pouces qui valent 1 toiſe-

pied, & 5 toiſes-pouces; l'on écrira 5^{TP} ſous les pouces, & l'on retiendra 1^{TP}.

3°. On multipliera 5^{P} par 2^{T}, ce qui produit 10 toiſes-pieds, leſquelles ajoutées à 1^{TP} que l'on vient de retenir, font 11 toiſes-pieds; ou 1 toiſe quarrée & 5 toiſes-pieds; l'on écrira 5^{TP} ſous les pieds, & on retiendra 1^{TT}.

4°. Enfin on multipliera 8^{T} par 2^{T}, ce qui produit 16 toiſes quarrées, leſquelles ajoutées à 1^{TT} que l'on vient de retenir, font 17 toiſes quarrées; on écrira 17^{TT} ſous les toiſes.

Tout le multiplicande étant ainſi multiplié par le multiplicateur, on trouvera qu'une ſurface dont l'un des produiſans contient 8 toiſes 5 pieds 8 pouces 9 lignes, & l'autre 2 toiſes, renferme 17 toiſes quarrées 5 toiſes-pieds 5 toiſes-pouces 6 toiſes-lignes.

Second Cas du Problême I.

232. *Meſurer une ſurface dont l'un des produiſans eſt un nombre complexe de toiſes, pieds & pouces, &c. & l'autre un nombre incomplexe de toiſes, exprimé par pluſieurs chiffres.*

Solution.

On prendra pour multiplicateur le produiſant qui ne renferme que des toiſes, & pour multiplicande l'autre produiſant qui eſt un nombre complexe de toiſes & de parties de la toiſe.

On multipliera toutes les parties du multiplicande par le multiplicateur.

On ne commencera pas, comme dans le cas précédent, la multiplication par les plus petites meſures linéaires du multiplicande, parce que la réduction des produits aux unités immédiatement plus grandes qu'ils renferment, eſt trop pénible lorſque le multiplicateur eſt repréſenté par pluſieurs chiffres.

Mais on multipliera d'abord les toiſes du multi-

plicande par les toiſes du multiplicateur, ce qui n'eſt qu'une multiplication incomplexe.

Pour multiplier les pieds du multiplicande par le nombre de toiſes du multiplicateur, on rapportera à la toiſe le nombre de pieds qui eſt au multiplicande; & ſi ce nombre de pieds eſt une partie aliquote de la toiſe, on prendra une aliquote ſemblable du produit qu'eût donné une toiſe multipliée par les toiſes du multiplicateur.

Si le nombre de pieds du multiplicande n'eſt pas une partie aliquote de la toiſe, on le réduira en parties aliquotes.

Pour multiplier le nombre de pouces qui eſt au multiplicande, par le nombre de toiſes du multiplicateur, on examinera ce que ce nombre de pouces eſt à l'égard du nombre de pieds que l'on aura précédemment multiplié; & l'on diviſera proportionnellement le produit qu'aura donné ce nombre de pieds.

On trouvera de même le produit du nombre de lignes du multiplicande, en rapportant ce nombre de lignes au nombre de pouces que l'on aura précédemment multiplié. Et ainſi de ſuite.

Enfin l'on ajoutera enſemble les produits particuliers que l'on aura formés, & leur ſomme ſera la ſurface demandée.

EXEMPLE.

Déterminer la ſurface dont l'un des produiſans contient . . . . . $8^{T}. 5^{P}. 6^{p}. 9^{L}$
& l'autre . . . . . $23^{T}.$

Produit de 8^{T} par 23^{T}. . . 184^{TT}
Produit de 3^{P} par 23^{T}. . . $11 . . 3^{TP}$
Produit de 2^{P} par 23^{T}. . . . $7 . . 4$
Produit de 6^{p} par 23^{T}. . . . $1 . . 5 . 6^{Tp}$
Produit de 9^{L} par 23^{T}. . . . $0 . . 1 . 5 . 3^{TL}$

$205^{TT}. 1^{TP}. 11^{Tp}. 3^{TL}.$

OPERATIONS.

1°. On multipliera 8^{T} par 23^{T}, ce qui produira 184 toiſes quarrées, & l'on écrira 184^{TT} ſous les toiſes.

2°. Pour multiplier 5^{T} par 23^{T}, on remarquera d'abord que 1^{T} multipliée par 23^{T}, donneroit 23^{TT}, c'eſt-à-dire, un nombre de toiſes quarrées repréſentées par le multiplicateur 23.

Puis décompoſant 5^{P} en 3^{P} & 2^{P} moitié & tiers de 1 toiſe, on prendra pour 3^{P} qui ſont la moitié de 1^{T} la moitié de 23^{TT}, produit de la multiplication de 1^{T} par 23^{T}, & cette moitié eſt 11^{TT} 3^{TP}; car la moitié de 23^{TT} eſt 11^{TT}, & il reſte 1^{TT} qui vaut 6^{TP} dont la moitié eſt 3^{TP} : l'on écrira donc 11^{TT} ſous les toiſes, & 3^{TP} ſous les pieds.

Enſuite pour 2^{P} qui ſont le tiers de 1^{T}, on prendra le tiers de 23^{TT}, produit de 1^{T} par 23^{T}, ce tiers eſt 7^{TT} 4^{TP}; car le tiers de 23^{TT} eſt 7^{TT}, & il reſte 2^{TT} qui valent 12^{TP}, dont le tiers eſt 4^{TP} : on écrira donc 7^{TT} ſous les toiſes, & 4^{TP} ſous les pieds.

3°. Pour multiplier 6^{P} par 23^{T}, on obſervera que 6 pouces ſont le quart des 2 pieds que l'on vient de multiplier, & qui ont produit 46^{TP} 4^{TP}; ainſi le quart de ce produit ſera celui des 6^{P}.

Or ce quart eſt 1^{TT} 5^{TP} 6^{Tp} que l'on écrira, comme on le voit dans l'exemple.

4°. Pour multiplier 9^{L} par 23^{T}, on obſervera que 9 lignes ſont la huitieme partie du nombre 6 pouces que l'on vient de multiplier, & qui ont produit 1^{TT} 5^{TP} 6^{Tp}; ainſi la huitieme partie de ce produit ſera le produit de 9^{L}.

Or cette huitieme partie eſt 1^{TP} 5^{Tp} 3^{TL} que l'on écrira comme on le voit dans l'exemple.

Toutes les parties du multiplicande étant ainſi mul-

tipliées par le multiplicateur, on ajoutera enſemble les produits particuliers que l'on vient de former, & leur ſomme $205^{TT}.1^{TP}\ 11^{Tp}\ 3^{TL}$ ſera la ſurface demandée.

TROISIEME CAS DU PROBLÊME I.

233. *Déterminer la valeur d'une ſurface dont les deux produiſans ſont des nombres complexes de toiſes & de parties de la toiſe.*

SOLUTION.

On prendra pour multiplicateur le produiſant qui aura le moins de toiſes.

On multipliera toutes les parties du multiplicande par le nombre de toiſes du multiplicateur, en appliquant les ſolutions des deux cas précédens, ſelon que le nombre de toiſes du multiplicateur ſera repréſenté par un ou par pluſieurs chiffres (n°. 231, 232).

Enſuite l'on multipliera le multiplicande entier par le nombre de pieds qui ſera dans le multiplicateur; ce que l'on exécutera en imaginant le multiplicande multiplié par une toiſe, & en diviſant enſuite ce produit proportionnellement à ce que le nombre de pieds qui eſt au multiplicateur eſt à l'égard de 1 toiſe, le quotient ſera le produit du multiplicande par le nombre de pieds qui ſe trouvera au multiplicateur.

Que ſi l'on diviſe ce dernier produit proportionnellement à ce que les pouces du multiplicateur, ſont au nombre de pieds par lequel on vient de multiplier, le quotient ſera le produit du multiplicande par le nombre de pouces qui ſe trouvera au multiplicateur.

Et ainſi de ſuite.

EXEMPLE.

Déterminer la valeur d'une ſurface dont l'un produiſans contient $48^{T}\ 5^{P}\ 6^{P}\ 9^{L}$ & l'autre . . . $23^{T}\ 4^{P}\ 6^{P}\ 9^{L}$

Produit du multiplicande par 23^{T}.

produit de 48^{T}	144	^{TT}					
	96						
produit de 3^{P}	11		3^{TP}				
produit de 2^{P}	7		4				
produit de 6^{P}	1		5		6^{TP}		
produit de 9^{L}	0		1		5	3^{TL}	

Produit du multiplicande.

par 3^{P}	24	2	9	4	$6^{T'}$		
par 1^{P}	8	0	11	1	6		
par 6^{P}	4	0	5	6	9		
par 9^{L}	0	3	0	8	4	$1^{T''}$	6

Produit total, ou ſurface demandée. $1162^{TT}.3^{TP}.2^{TP}.9^{TL}.1^{T'}.1^{T''}.6$

OPÉRATIONS.

Prenant pour multiplicateur le produiſant 23 $6^{P}\ 6^{L}$ qui a le moins de toiſes, on multipliera l tre produiſant $48^{T}\ 5^{P}\ 6^{P}\ 9^{L}$, de cette ſorte :

1°. On multipliera les 48^{T}, les 5^{P}, les 6^{P}, le du multiplicande ſelon la méthode du (n°. 232) qui donnera les produits particuliers marqués ci-de dans l'exemple.

2°. Pour multiplier le multiplicande par les 4^{I} multiplicateur, on imaginera d'abord que le multi cande eſt multiplié par 1^{f}, ce qui donne $48^{TT}\ 5^{TP}$ 9^{TL}, (ce produit eſt le multiplicateur même, en poſant à chacune de ſes parties une ſeconde dim ſion de 1 toiſe).

Puis décompoſant 4^{P} du multiplicateur en 3^{P}

ſont la moitié de 1^T & 1^P qui eſt le tiers de 3^P, on prendra pour 3^P la moitié du multiplicande qui, étant ſuppoſé multiplié par 1^T, eſt devenu $48^{TP}\ 5^{TP}\ 6^{TP}\ 9^{TL}$, cette moitié eſt . . . . $24^{TT}\ 2^{TP}\ 9^{TP}\ 4^{TL}\ 6^{T'}$.

Et enſuite pour 1^P qui reſte des 4^P du multiplicateur, on prendra le tiers du produit que l'on a eu en multipliant par 3^P, c'eſt-à-dire, le tiers de . . . . . $24^{TT}\ 2^{TP}\ 9^{TP}\ 4^{TL}\ 6^{T'}$, ce tiers eſt . . . . . $8^{TT}\ 0^{TP}\ 11^{TP}\ 1^{TL}\ 6^{T'}$.

3°. Pour multiplier le multiplicande par les 6^P du multiplicateur, on rapportera les 6^P à 1^P, par lequel on vient de multiplier, & comme 6^P ſont la moitié de 1^P, on prendra la moitié du produit $8^{TT}\ 0^{TP}\ 11^{TP}\ 1^{TL}\ 6^{T'}$, cette moitié eſt . . . . $4^{TT}\ 8^{TP}\ 5^{TP}\ 6^{TL}\ 9^{T'}$.

4°. Enfin pour multiplier le multiplicande par les 9^L du multiplicateur, on rapportera ces 9^L aux 6^P par leſquels on vient de multiplier, & comme 9^L ſont la huitieme partie de 6^P, on prendra le huitieme du produit $4^{TT}\ 0^{TP}\ 5^{TP}\ 6^{TL}\ 9^{T'}$ qui eſt venu en multipliant par 6^P.

Cette huitieme partie eſt $3^{TP}\ 0^{TP}\ 4^{TL}\ 4^{T'}\ 1^{T''}\ 6^{T'''}$.

Tout le multiplicande étant multiplié par toutes les parties du multiplicateur, on ajoutera enſemble les produits particuliers, & l'on trouvera que la ſurface demandée contient $1162^{TT}\ 3^{TP}\ 2^{TP}\ 0^{TL}\ 1^{T'}\ 1^{T''}\ 6^{T'''}$.

EXEMPLE II.

Multiplier $48^T\ 0^P\ 6^P\ 9^L$
par . . $23^T\ 4^P\ 0\ 9^L$.

Dans cet exemple, le multiplicande & le multiplicateur ſont encore des nombres complexes de toiſes & de parties de la toiſe, comme dans l'exemple précédent. Toute la différence c'eſt que dans ce ſecond exemple il y a des unités intermédiaires qui manquent

dans les produiſans. Dans le multiplicande il manque des pieds, ſur le produit deſquels on puiſſe prendre le produit des 6' qui ſuivent; & dans le multiplicateur il n'y a pas de pouces ſur le produit deſquels on puiſſe prendre le produit du multiplicande par les 9 lignes qui ſuivent dans le multiplicateur.

Voici ce qu'il y aura à faire dans cet exemple, & dans tous les ſemblables.

Au lieu de rapporter la partie, qui ſuit la partie intermédiaire qui manque, à celle qui précede cette partie intermédiaire, ce qui fait un intervalle trop long, il faudra ſuppoſer un nombre d'unités de la valeur de celles qui manquent, & choiſir ce nombre ſuppoſé, de façon qu'autant qu'il ſera poſſible, il ſoit aliquote du nombre des unités immédiatement plus grande, qui ſera dans le produiſant où on le ſuppoſera, & que le nombre des unités immédiatement moindres qui le ſuivra; en ſoit auſſi aliquote.

Dans l'exemple ci-deſſus, au lieu de rapporter dans le multiplicande les 6 pouces à la toiſe, & dans le multiplicateur les 9 lignes au pied, on pourra ſuppoſer.

Dans le multiplicande 1^P, qui eſt le $\frac{1}{6}$ de la toiſe, & dont les 6^l qui ſuivent ſont la moitié.

Dans le multiplicateur on pourra ſuppoſer 6 pouces qui ſont aliquotes de 4^P, ou à l'égard des aliquotes de 4^P, & dont les 9^L qui ſuivent ſont auſſi aliquotes.

Ce qui changera l'exemple propoſé en celui qui ſuit :

Multiplier	48^{T}	2^{P}	6^{P}	9^{L}.				
par . .	23	4^{P}	6^{P}	9^{P}.				
Produit du multiplicande par 23. produits de 48^{T}	144							
	96							
prod. de 1^{P} supposé	3	9^{TP}						
produit de 6^{P}	1	5	6^{TP}					
produit de 9^{L}	0	1	5	3^{TL}				
Produits du multiplicande. par 4^{P} ou 3^{P}	24	0	3	4	$6^{T'}$			
$+1^{P}$	8	0	1	1	$6^{T'}$			
par 6^{P}	6^{P}	6^{P}	6^{P}	6^{P}	$9^{T'}$			
par 9^{L}	0	3	0	0	10	$1^{T''}$	$6^{T'''}$	
Produit total, ou surface demandée.	1138^{TT}.	4^{TP}.	3^{TP}.	9^{TL}.	$10^{T'}$.	$1^{T''}$.	$6^{T'''}$	

On fera la multiplication de la même façon que si les parties suppoſées 2^{P} dans le multiplicande, & 6^{P} dans le multiplicateur étoient réels. Tout ce qu'il y aura à obſerver, c'eſt de ne point faire entrer dans le produit total les produits qu'auront donné ces parties ſuppoſées, parce que ces produits ſeront eux-mêmes ſuppoſés, n'ayant été introduits que pour déterminer plus aiſément les produits réels; pour mieux diſtinguer les parties ſuppoſées, & les produits qui en réſultent, on les coupe par des traits.

REMARQUES.

I.

234. On ne meſure à la toiſe que les ſurfaces de l'Architecture civile & militaire, & celle des terreins peu conſidérables; lorſqu'un terrein eſt très-étendu, on ſe ſert de la perche & autres meſures relatives à l'arpent; & lorſqu'une ſurface eſt très-petite, on n'emploie que des parties de la toiſe; par exemple, des pieds & des pouces, &c. quelquefois même on me-

ſure à l'aune : il paroît donc que ce que l'on vient de dire pour la ſolution du problême premier (n°. 230), ne renferme pas tout le calcul des ſurfaces.

Mais ſi on réfléchit aux principes du toiſé, on reconnoîtra aiſément qu'ils ſont généraux, & applicables par conſéquent aux calculs des ſurfaces, quelle que ſoit l'eſpece des meſures dont on ſe ſera ſervi pour meſurer leurs produiſans.

II.

La ſurface dont les produiſans ſont connus en toiſes & en parties de la toiſe, peut être ou un rectangle, ou un parallélogramme, ou un triangle, ou un poligone régulier, ou un cercle, &c. On aura donc dans la ſolution du problême précédent (n°. 230) la maniere de meſurer toutes les figures dont on a parlé dans le Chapitre IV. Il ſuffira, pour en faire l'application, de ſe rappeller les produiſans qui ont été déterminés pour chacune d'elles.

PROBLÊME II.

235. *Une ſurface évaluée en toiſes quarrées, toiſes-pieds & toiſes-pouces, &c. étant donnée avec l'un de ſes produiſans, déterminer ſon autre produiſant.*

SOLUTION.

Comme une ſurface eſt le produit de ſes deux produiſans ; & qu'en diviſant un produit quelconque fait de la multiplication de deux grandeurs, par l'une de ces grandeurs, l'autre eſt toujours repréſentée par le quotient, on conclura que c'eſt en diviſant la ſurface donnée par celui de ſes deux produiſans qui ſera donné, que l'on déterminera l'autre : ce qui eſt une diviſion compoſée, puiſque l'on ſuppoſe la ſurface donnée compoſée d'unités de différentes valeurs, &

en

en ſe rappellant ce que l'on a dit dans l'Arithmétique touchant la diviſion compoſée, on conclurra la méthode qui ſuit.

Si le produiſant donné eſt un nombre incomplexe de toiſes, on diviſera ſucceſſivement par ce nombre incomplexe de toiſes, les toiſes quarrées, les toiſes-pieds & les toiſes-pouces, &c. de la ſurface propoſée, obſervant de réduire aux meſures immédiatement ſuivantes, le reſte de chaque diviſion.

Si le produiſant donné n'eſt pas un nombre incomplexe de toiſes, on multipliera ce produiſant par des nombres propres à le rendre un nombre incomplexe de toiſes; & pour que le quotient, par ce nouveau produiſant, ſoit le vrai quotient, on multipliera la ſurface propoſée par les mêmes nombres par leſquels on aura multiplié ſon produiſant donné; on diviſera enſuite la ſurface que l'on aura après ces multiplications, par le nombre incomplexe de toiſes dans lequel on aura changé le produiſant donné.

L'on obſervera que les unités de la ſurface étant des toiſes quarrées, des toiſes-pieds, des toiſes-pouces, &c. c'eſt-à-dire, des unités qui ont la toiſe pour commun produiſant, & la toiſe, le pied, le pouce, &c. pour produiſans inégaux, lorſque le diviſeur eſt un nombre incomplexe de toiſes, le quotient ou le produiſant cherché eſt néceſſairement un nombre complexe de toiſes & de parties de toiſes, ou ſeulement de parties de toiſes, & nullement un nombre incomplexe de toiſes; car ce nombre incomplexe de toiſes que contiendroit le quotient multiplié par le nombre incomplexe de toiſes que contient le diviſeur, donneroit (n°. 207) un nombre incomplexe de toiſes quarrées; ce qui ſeroit un produit différent du dividende, ou de la ſurface que l'on auroit diviſée.

EXEMPLE I.

Etant donnée la ſurface $17^{TT}\ 5^{TP}\ 5^{Tp}\ 6^{TL}$, *& l'un de ſes produiſans étant égal à* 2^{T}, *déterminer l'autre produiſant.*

OPÉRATIONS.

Ayant diſpoſé, comme on le voit, la ſurface & le produiſant donnés, on opérera comme il ſuit :

17^{TT}	5^{TP}	5^{Tp}	6^{TL}	2^{T}
16	11	17	18	
1^{TT}	10	16	18	
6	1^{TP}	1^{Tp}	00	
6^{TP}	12	12		
	12^{Tp}	12^{TL}		

1°. L'on diviſera les 17^{TT} par le diviſeur 2^{T}, ce qui donnera pour quotient 8^{T}, parce que des toiſes quarrées, diviſées par des toiſes linéaires, donnent des toiſes linéaires, par la raiſon que des toiſes linéaires multipliées par des toiſes linéaires, donnent des toiſes quarrées (n°. 207) : il reſtera 1^{TT}.

2°. On réduira en toiſes-pieds la 1^{TT} qui reſte de la premiere diviſion en multipliant par 6, parce que la toiſe quarrée vaut 6 toiſes-pieds ; il vient 6^{TP}, ce qui, ajouté aux 5^{TP} de la ſurface propoſée, fait 11^{TP} ; on diviſera 11^{TP} par le diviſeur 2^{T}, l'on aura 5^{P} au quotient, parce que des toiſes-pieds diviſées par des toiſes linéaires, donnent des pieds linéaires au quotient, par la raiſon que les toiſes-pieds réſultent de la multiplication des toiſes linéaires par les pieds linéaires (n°. 209), & il reſtera 1^{TP}.

3°. On réduira en toiſes-pouces 1^{TP} qui reſte de la ſeconde diviſion, en multipliant par 12, ce qui donnera 12^{Tp} ; ajoutant ces 12^{Tp} aux 5^{Tp} de la ſurface propoſée, il viendra 17^{Tp} que l'on diviſera par le diviſeur 2^{T}, & l'on aura 8^{p} pour quotient ; car des toiſes-pouces venant de la multiplication de toiſes linéaires par des pouces linéaires, il eſt évident que les toiſes-

pouces étant diviſées par des toiſes linéaires, on doit avoir des pouces linéaires pour quotient; il reſtera 1^{Tp}.

4°. On réduira en toiſes-lignes $1^{T\prime}$ qui reſte de la troiſieme diviſion, en multipliant par 12, ce qui donnera 12^{TL}; ajoutant ces 12^{TL} à 6^{TL} de la ſurface propoſée, il viendra 18^{TL} que l'on diviſera par le diviſeur 2^{T}, & l'on aura pour quotient 9^{L} ſans aucun reſte.

Le produiſant cherché eſt donc . . $8^{T}\ 5^{P}\ 8^{p}\ 9^{L}$.

EXEMPLE II.

Etant donnée la ſurface $1162^{TT}\ 0^{TP}\ 1^{Tp}\ 3^{TL}\ 9^{T\prime}$, *& le produiſant* . . . $23^{T}\ 4^{P}\ 6^{p}$, *déterminer l'autre produiſant.*

OPÉRATIONS.

On s'appliquera d'abord à changer le produiſant donné en un nombre incomplexe de toiſes.

Pour faire diſparoître les 6 pouces, comme ils ſont la moitié d'un pied, on multipliera par 2 toutes les parties du produiſant, & toutes celles de la ſurface donnée; ce qui donnera,

$2324^{TT}\ 0^{TP}\ 2^{Tp}\ 7^{TL}\ 6^{T\prime}$, nouvelle ſurface.

$47^{T}\ 3^{P}$ . . . . . nouveau produiſant.

Pour faire diſparoître dans le nouveau produiſant les 3^{P} qui ſont la moitié de 1^{T}, on multipliera encore par 2, & le nouveau produiſant, & la nouvelle ſurface; ce qui donnera,

$4648^{TT}\ 0^{TP}\ 5^{Tp}\ 3^{TL}$, nouvelle ſurface.

95^{T} . . . . . nouveau produiſant.

La ſurface propoſée & ſon produiſant donné, étant ainſi préparés, on les diſpoſera comme on le voit.

Surface préparée.
$4648^{TT}\ 0^{TP}\ 5^{Tp}\ 3^{TL}$ $\left\{\begin{array}{l} 95^{T}. \text{ diviſeur préparé.} \\ \hline 48^{T}\ 5^{P}\ 6^{p}\ 9^{L}. \text{ quotient.} \end{array}\right.$

On diviſera enſuite, comme dans l'exemple mier ſucceſſivement les 4648^{TT}, les 0^{TP}, les les ^{TL} de la ſurface préparée, par le diviſeur pr 95^{T}, & l'on trouvera que le quotient ou le produ cherché eſt exactement $48^{t}\ 5^{p}\ 6p\ 9^{l}$.

REMARQUES.

I.

236. On a, dans la ſolution du problême p dent, le moyen de vérifier le toiſé des ſurfaces : toiſé d'une ſurface ſe fait en multipliant ſes deux duiſans l'un par l'autre ; & l'on eſt aſſuré qu'un duit eſt bien fait, lorſqu'en diviſant ce produi l'un de ſes produiſans, on trouve l'autre pour tient. Donc pour s'aſſurer que l'on ne s'eſt pas tr dans le toiſé d'une ſurface, on pourra diviſer ſurface par l'un de ſes produiſans ; & ſi le toiſé fait exactement, le quotient exprimera l'autre pr ſant.

II.

Lorſqu'on voudra, ſur une ligne d'une valeu nue & exprimée en toiſes, pieds & pouces, &c. un parallélogramme qui ait une ſurface demand dont les unités ſoient des toiſes quarrées, des t pieds, des toiſes-pouces, &c. on diviſera cett face déterminée par le nombre de toiſes-pieds & ces, &c. que contient la baſe donnée ; le quotien le ſecond produiſant du parallélogramme, c'e dire, ſa hauteur ; on fera enſuite ſur la baſe d un parallélogramme quelconque dont la hauteu égale à toutes les meſures que contiendra le quo

III.

Lorſqu'on voudra, ſur une droite d'une valeu

nue & exprimée en toiſes, pieds & pouces, &c. faire un triangle qui ait une ſurface demandée & évaluée en toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. on diviſera cette ſurface par le nombre de toiſes, pieds & pouces que contient la baſe donnée; le quotient ſera le ſecond produiſant du triangle, c'eſt-à-dire, la moitié de ſa hauteur; on fera enſuite, ſur la baſe donnée, un triangle quelconque dont la hauteur ſoit double du quotient trouvé.

PROBLÊME III.

237. *Une ſurface étant évaluée en toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c. réduire en pieds quarrés, pouces quarrés, &c. ſes parties moindres que la toiſe quarrée.*

SOLUTION.

Ce problême eſt très-aiſé à réſoudre, après la table démontrée que l'on a donnée touchant la valeur des parties irrégulieres de la toiſe quarrée.

Parce que chaque toiſe-pied vaut 6 pieds quarrés, & chaque toiſe-pouce $\frac{1}{2}$ pied quarré, c'eſt à-dire 72 pouces quarrés, on réduira en pieds quarrés un nombre quelconque de toiſes-pieds, & un nombre quelconque de toiſes-pouces, en multipliant le premier par 6, & en diviſant le ſecond par 2; que ſi en diviſant le nombre de toiſes-pouces par 2, il reſte 1 toiſe-pouce, on l'évaluera en 72 pouces quarrés, valeur de la toiſe-pouce. (*Table*, n°. 230).

Parce que la toiſe-ligne vaut 6 pouces quarrés, & la toiſe-prime $\frac{1}{2}$ pouce quarré, ou 72 lignes quarrées (*Table*, n°. 230), on réduira en pouces quarrés un nombre quelconque de toiſes-lignes, & un nombre quelconque de toiſes-primes, en multipliant le premier par 6, & en diviſant le ſecond par 2; que ſi en

diviſant le nombre de toiſes-primes par 2, il reſte 1 toiſe-prime, on l'évaluera en 72 lignes quarrées, valeur de la toiſe-prime.

Parce que la toiſe-ſeconde vaut 6 lignes quarrées, & la toiſe-tierce $\frac{1}{2}$ ligne quarrée, ou 72 primes quarrées (*Table*, 2°. 230), on réduira en lignes quarrées un nombre quelconque de toiſes-ſecondes, & un nombre quelconque de toiſes-tierces, en multipliant le premier par 6, & en diviſant le ſecond par 2.

Et ainſi de ſuite pour les autres parties continuellement plus petites que l'on multipliera alternativement par 6 & par $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE.

Soit la ſurface $1162^{TT}\ 3^{TP}\ 7^{Tp}\ 3^{TL}\ 6^{T'}\ 8^{T''}\ 4^{T'''}$, dont on veut réduire en meſures quarrées les parties moindres que la toiſe quarrée.

OPÉRATIONS.

Surface donnée $1162^{TT}\ 3^{TP}\ 7^{Tp}\ 3^{TL}\ 6^{T'}\ 8^{T''}\ 4^{T'''}$.

6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}$
18^{PP}		72^{Pp}		48^{LL}	
3		18		2	
		3			
$1162^{TT}\ 21^{PP}$		93^{Pp}		50^{tL}	

Ayant placé le multiplicateur . . . . . { 6 ſous les TP. $\frac{1}{2}$ ſous Tp. / 6 ſous les TL. $\frac{1}{2}$ ſous les T'. / 6 ſous les T''. $\frac{1}{2}$ ſous les T'''.

On multipliera chaque partie de la ſurface propoſée par le multiplicateur qui ſera écrit au-deſſous, en commençant par les toiſes-pieds, & en diſant:

6 fois 3^{tP} ſont 18^{PP}, l'on écrira 18^{PP} ſous les toiſes-pieds.

La moitié de 7^{TP} eſt 3 pieds quarrés $\frac{1}{2}$; on écrira 3^{PP} ſous les 18^{PP} que l'on vient de former, & 72^{PP} valeur de $\frac{1}{2}{}^{PP}$ ſous les ^{TL}.

6 fois 3^{TL} font 18 pouces quarrés, on écrira 18^{PP} ſous 72^{PP}.

La moitié de $6^{T'}$ eſt 3 pouces quarrés; on écrira 3^{PP} ſous 18^{PP}.

6 fois $8^{L''}$ font 48 lignes quarrées; on écrira 48^{LL} ſous les toiſes ſecondes.

Enfin la moitié de $4^{T'''}$ eſt 2 lignes quarrées; on écrira 2^{LL} ſous les 48^{LL}.

On ajoutera enſemble tous les produits que l'on aura formé, & l'on trouvera que la ſurface propoſée ſe réduit à celle-ci . . $1162^{TT}\ 21^{PP}\ 93^{PP}\ 50^{LL}$, laquelle ne renferme plus que des meſures quarrées.

PROBLÊME IV.

238. *Extraire la racine quarrée d'une ſurface évaluée en toiſes quarrées, toiſes-pieds, toiſes-pouces, &c.*

SOLUTION.

Extraire la racine quarrée d'une ſurface quelconque exprimée en toiſes quarrées, toiſes-pieds & toiſes-pouces, &c. c'eſt chercher la valeur de la ligne qui, multipliée par elle-même, donne la ſurface propoſée, lorſque cette ſurface eſt un quarré parfait, ou le plus grand quarré contenu dans la ſurface propoſée, lorſque cette ſurface n'eſt pas un quarré parfait.

Or pour déterminer cette ligne, voici la méthode la plus ſimple :

1°. On réduira, par le problême précédent, en meſures quarrées, les parties de la ſurface propoſée, qui ſont moindres que la toiſe quarrée (n°. 237).

2°. Toutes les unités de la ſurface propoſée étant devenues des meſures quarrées, on les réduira aux

meſures quarrées les plus petites que renfermera l nouvelle ſurface. La table que l'on a donnée touchan la valeur de la toiſe quarrée, du pied quarré, du pouc quarré, &c. (*Table*, n°. 230) ſervira à faire cette ré duction.

3°. On extraira la racine quarrée du nombre in complexe de meſures quarrées, dans lequel on aur changé la ſurface propoſée (n°. 206).

Et comme les unités de la racine ſeront les meſure linéaires qui ſont les côtés des petites meſures quar rées, auxquelles la ſurface propoſée a été réduite, o réduira cette racine aux grandes meſures linéaire qu'elle pourra contenir, en la diviſant continuelle ment par les nombres qui exprimment le rapport de ce meſures.

EXEMPLE.

Extraire la racine quarrée de la ſurface . . . . . $19^{TT}\ 3^{TP}\ 0^{Tp}\ 6^{TL}$.

OPÉRATIONS.

Surface propoſée . . $19^{TT}\ 3^{TP}\ 0^{Tp}\ 6^{TL}$.

Surface réduite en meſures quarrées . . $19^{TT}\ 18^{PP}\ 36^{pp}$.

Réduction des toiſes quarrées & pieds quarrés en pouces quarrés. $\frac{36}{684}$ pp $\frac{684}{702}$ pp $\frac{101088}{101124}$ pp, $\frac{144}{101088}$ pp.

Extraction de la racine quarrée 101124^{pp}. $318^{p} = 4^{T}\ 2^{P}\ 6^{p}$, racin

1°. En appliquant la ſolution du problême préc dent, on changera la ſurface propoſée en celle- . . . . . $19^{TT}\ 18^{PP}\ 36^{pp}$ dont les unités ſont toutes des meſures quarrées.

2°. Comme dans cette nouvelle ſurface les pouc

quarrés ſont les plus petites unités, on réduira en pouces quarrés les autres meſures quarrées, de cette ſorte :

On réduira les 19^{TT} en pieds quarrés, en multipliant 19^{TT} par 36, parce que la toiſe quarrée contient 36 pieds quarrés (*Table*, n°. 230), il réſultera de la multiplication 684 pieds quarrés, que l'on ajoutera à 18^{PP} que renferme la ſurface, la ſomme ſera 702^{PP}.

On réduira ces 702^{PP} en pouces quarrés, en multipliant 702^{PP} par 144, parce que le pied quarré vaut 144 pouces quarrés (*Table*, n°. 230); la multiplication donnera 101088 pouces quarrés que l'on ajoutera à 36^{PP} que renferme la ſurface; la ſomme qui ſera la valeur totale de la ſurface propoſée, ſera 101124 pouces quarrés.

3°. On extraira la racine quarrée de 101124^{PP}; on trouvera que cette racine eſt exactement 318.

Comme les unités de cette racine ſont des pouces, on réduira ces 318^{P} en pieds, en diviſant 318 par 12; ce qui donnera 26 pieds 6 pouces; on réduira 26 pieds en toiſes, en diviſant 26 par 6, ce qui donnera 4 toiſes & 2 pieds.

Ainſi la ſurface propoſée . . $19^{TT}\ 3^{TP}\ 0^{TP}\ 6^{TL}$, aura pour racine quarrée . . $4^{T}\ 2^{P}\ 6^{P}$.

CHAPITRE SIXIEME.

Les Raiſons & Proportions des lignes.

Comme les raiſons & proportions des quantités algébriques dont j'ai traité dans mes Elémens de Calcul, ſervent de baſe à tout ce que l'on va démontrer dans ce Chapitre touchant les lignes proportionnelles, & à ce que l'on démontrera dans la ſuite touchant les ſurfaces & les ſolides ſemblables; on rappellera ici en peu de mots les définitions, les principes, & les propriétés des raiſons & proportions algébriques dont on fera dans la ſuite le plus d'application; on paſſera enſuite à l'examen des lignes proportionnelles.

SECTION PREMIERE.

Les Raiſons & Proportions géométriques en général.

ARTICLE I.

DÉFINITIONS.

239. 1°. LA *raiſon* ou le *rapport* géométrique, c'eſt le réſultat de la comparaiſon que l'on fait de deux grandeurs, en examinant combien de fois l'une contient l'autre.

La grandeur que l'on regarde comme le dividende

ſt dite l'*antécédent* du rapport; celle que l'on prend pour le diviſeur, eſt dite *conſéquent*; & le quotient qui viendroit en diviſant effectivement l'antécédent par le conſéquent, eſt dit l'*expoſant* du rapport géométrique.

Par exemple, ſi l'on compare 12 à 4, pour découvrir combien de fois 12 contient 4, cette comparaiſon que l'on indique ainſi . . . . . 12 : 4, ſera un rapport géométrique dont l'antécédent eſt 12 dont le diviſeur eſt 4, & dont l'expoſant eſt le quotient 3 qui vient lorſque l'on diviſe 12 par 4.

240. 2°. On nomme *raiſon compoſée* la raiſon géométrique dont l'antécédent eſt le produit des antécédens de deux ou pluſieurs raiſons données, & dont le conſéquent eſt le produit de leurs conſéquens.

Par exemple, étant données les raiſons 4 : 2, 5 : 6, 10 : 8, ſi on multiplie enſemble les antécédens, & enſemble les conſéquens de ces raiſons, & que l'on compare enſemble les produits $4 \times 5 \times 10$, $2 \times 6 \times 8$; on aura la raiſon $4 \times 5 \times 10 : 2 \times 6 \times 8 = 200 : 96$, que l'on nomme compoſée par oppoſition aux raiſons ſimples propoſées.

La raiſon compoſée eſt dite *doublée*, lorſqu'elle vient de la multiplication de deux raiſons égales; par exemple, ſi avec les raiſons égales 8 : 4, 6 : 3, on fait la raiſon compoſée $8 \times 6 : 4 \times 3$, cette raiſon compoſée ſera dite *raiſon doublée*.

La raiſon compoſée eſt dite *triplée*, lorſqu'elle eſt le réſultat de la multiplication de trois raiſons égales; par exemple, la raiſon $8 \times 6 \times 10 : 4 \times 3 \times 5$, qui vient en multipliant enſemble les trois raiſons égales 8 : 4, 6 : 3, 10 : 5, eſt une raiſon triplée.

De la définition de la raiſon compoſée, on conclura que la raiſon de deux produits qui ont chacun ou deux, ou trois, ou un plus grand nombre de pro-

duiſans, eſt une raiſon compoſée des raiſons ſimple formées de la comparaiſon des produiſans de ces pro duits.

241. 3°. On nomme *proportion géométrique* la com paraiſon de deux raiſons géométriques égales ; pa exemple, les raiſons égales 8 : 4, 6 : 3, formen une proportion géométrique que l'on exprime ain . . . . . 8 : 4 :: 6 : 3 & que l'on énonce en diſant 8 contient 4 comme contient 3.

La proportion géométrique eſt donc une ſuite d quatre termes tels que le premier contient le ſecond comme le troiſieme contient le quatrieme.

Dans la proportion géométrique, le premier anté cédent & le ſecond conſéquent, c'eſt-à-dire, le pre mier & le dernier terme ſe nomment les *extrêmes* d la proportion ; le premier conſéquent & le ſecon antécédent, ou le ſecond & le troiſieme termes, ſ nomment les *moyens*.

La proportion géométrique *continue* eſt une ſuit de trois grandeurs qui ſont telles que la premie contient la ſeconde, comme cette ſeconde contient l troiſieme : telle eſt la ſuite des nombres 8, 4. 2.

On l'écrit ainſi . . . . . :: 8 : 4 : 2

Le terme du milieu qui tient lieu des deux moyens c'eſt-à-dire, qui ſert de premier conſéquent & de ſe cond antécédent, ſe nomme *moyen proportionnel*.

242. 4°. Lorſque l'on aura une ſuite de rapport égaux, telle que, par exemple, 32 : 16, 24 : 12, 18 : 9 on pourra l'écrire de cette ſorte 32 : 16 :: 24 : 12 :: 18 : 9 en mettant les rapports égaux ſur une même ligne, & en les ſéparant par quatre points.

Ou de cette ſorte 32 : 24 : 18 :: 16 : 12 : 9 & en mettant les antécédens dans une ſuite, & le conſéquens dans une autre, & en ſéparant les deu

suites par quatre points. Dans cette derniere expreſſion, on obſervera de rapporter le premier antécédent 32 au premier conſéquent 16, le ſecond antécédent 24 au ſecond conſéquent 12.

243. 5°. Une proportion quelconque $a : b :: c : d$ étant donnée, ſi on fait changer de place les deux termes du milieu de cette ſorte . . $a : c, b : d$, ce changement s'appelle *alterner*.

Si les deux termes de chaque raiſon changent de place de cette ſorte . . . . $b : a, d : c$, ce changement s'appelle *permuter*.

Si dans chaque raiſon on ajoute enſemble l'antécédent & le conſéquent, & que l'on compare les ſommes ou aux antécédens, ou aux conſéquens de cette ſorte . . . . $\begin{cases} a+b : a, c+d : c \\ a+b : b, c+d : d, \end{cases}$ ce changement s'appelle *compoſer*.

Si dans chaque raiſon on prend la différence de l'antécédent & du conſéquent, & que l'on compare ces différences aux antécédens ou aux conſéquens, de cette ſorte . . . . . $\begin{cases} a-b : a, c-d : c \\ a-b : b, c-d : d, \end{cases}$ ce changement s'appelle *ſouſtraire*.

ARTICLE II.

Principes relatifs aux raiſons & aux proportions.

Par ces termes *raiſons* & *proportions*, on entendra toujours dans la ſuite les raiſons & proportions géométriques.

244. 1°. *Si dans la proportion géométrique les antécédens ſont égaux, les conſéquens le ſeront auſſi.*

Autrement les antécédens ne renfermeroient pas de la même maniere leurs conſéquens.

On dira de même que l'égalité des deux conſéquens

entraîne l'égalité des deux antécédens; que l'égalité des deux premiers termes entraîne l'égalité du troiſieme & du quatrieme, & réciproquement.

245. 2°. *Deux raiſons ſont égales entr'elles, lorſqu'elles ſont chacunes égales à une troiſieme raiſon.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a . . $\begin{cases} a:b \\ c:d \end{cases} :: e:f$,

on conclura évidemment . . . $a:b :: c:d$.

Et par conſéquent ſi les raiſons de deux ſuites ſont égales aux raiſons d'une troiſieme ſuite chacune à chacune, les raiſons qui compoſent la premiere ſuite, ſont égales chacune à chacune aux raiſons qui compoſent la ſeconde.

Car, par la ſuppoſition même, les raiſons correſpondantes des deux premieres ſuites priſes deux à deux, ſont égales à une troiſieme raiſon correſpondante, priſe dans la troiſieme ſuite.

246. 3°. *L'antécédent de la raiſon géométrique eſt égal au produit du conſéquent multiplié par l'expoſant de cette raiſon.*

C'eſt-à-dire, que dans la raiſon géométrique $a:b$, ſi on ſuppoſe l'expoſant déſigné par r, on aura $a=br$. En effet, la raiſon géométrique de a à b n'eſt autre choſe que la diviſion de l'antécédent a par le conſéquent b, dont le quotient eſt appellé *expoſant*.

Or le dividende eſt égal au produit du diviſeur par le quotient; donc l'antécédent ſera de même égal au produit du conſéquent, multiplié par l'expoſant.

Par conſéquent ſi r eſt l'expoſant de la raiſon $a:b$, on pourra, en mettant br à la place de l'antécédent a, la changer en celle-ci . . . . . $br:b$.

Et ſi r eſt l'expoſant de la proportion $a:b :: c:d$, on pourra, en mettant à la place des antécédens les conſéquens multipliés par l'expoſant, la changer en celle-ci . . . . . $br:b :: dr:d$.

247. 4°. *Le rapport ne change pas lorſqu'on multiplie ou que l'on diviſe chacun de ſes termes par la même quantité.*

Par exemple, étant donnée la raiſon . . $a : b$, ſi l'on multiplie ou ſi l'on diviſe les deux termes par c, on aura les raiſons . . . . . $\begin{cases} ac : bc \\ \frac{a}{c} : \frac{b}{c} \end{cases}$, de même valeur que la raiſon $a : b$; car la diviſion de ac par bc, ou de $\frac{a}{c}$ par $\frac{b}{c}$, ſe réduit à celle de a par b, & donne par conſéquent le même expoſant.

248. Par conſéquent, *les grandeurs ſont entr'elles comme leurs équimultiples, ou comme leurs équiſoumultiples*, c'eſt-à-dire, comme leurs doubles, leurs triples, leurs quadruples, &c. ou comme leurs moitiés, leurs tiers, leurs quarts, &c.

C'eſt-à-dire, que $a : b :: \begin{cases} 2a : 2b \\ \frac{a}{2} : \frac{b}{2} \end{cases} :: \begin{cases} 3a : 3b \\ \frac{a}{3} : \frac{b}{3} \end{cases}$ &c.

Car les équimultiples de deux grandeurs ne ſont autre choſe que ces grandeurs multipliées par des mêmes nombres.

Et les équiſoumultiples ou les parties ſemblables de deux grandeurs ne ſont autre choſe que ces grandeurs diviſées par des mêmes nombres.

ARTICLE III.

Propriétés de la raiſon compoſée.

249. *L'expoſant de la raiſon compoſée de deux ou de pluſieurs raiſons données, eſt le produit des expoſans de ces raiſons.*

C'eſt-à-dire, qu'étant données les raiſons $\begin{cases} a : b \\ c : d \\ m : n \end{cases}$ dont les expoſans ſoient r pour la 1re, s pour la 2e, q pour la 3e.

La raiſon compoſée $ac : bd$ des deux premieres, aura pour expoſant rs; & la raiſon compoſée $acm : bdn$ des trois premieres, aura pour expoſant rsq, &c.

En effet, mettant dans les raiſons propoſées, à la place de chaque antécédent ſon conſéquent multiplié par l'expoſant, elles deviendront . . $\begin{cases} br : b \\ ds : d \\ qn : n \end{cases}$

Et la raiſon compoſée $ac : bd$ des deux premieres raiſons données deviendra $bdrs : bd$, dont l'expoſant eſt viſiblement le produit rs des expoſans des deux premieres raiſons données.

La raiſon compoſée $acm : bdn$ des trois premieres raiſons données, deviendra $bdnrsq : bdn$, dont l'expoſant eſt le produit rsq des expoſans des trois premieres raiſons données, &c.

250. D'où il ſuit que, 1°. *la raiſon doublée qui eſt une raiſon compoſée de deux raiſons égales, aura pour expoſant le produit des expoſans égaux de ces deux raiſons égales; ce qui eſt le quarré de l'expoſant de l'une de ces deux raiſons.*

Et comme la raiſon quelconque . . . $a^2 : b^2$ de deux quarrés eſt une raiſon doublée formée de la multiplication des deux raiſons égales . . . $\begin{cases} a : b \\ a : b, \end{cases}$ on conclura que l'*expoſant de la raiſon des quarrés de deux grandeurs, eſt le quarré de l'expoſant de la raiſon ſimple formée de la comparaiſon de ces deux grandeurs.*

251. 2°. *La raiſon triplée qui eſt une raiſon compoſée de trois raiſons égales, aura pour expoſant le produit des trois expoſans égaux des trois raiſons égales dont elle eſt formée; ce qui eſt le cube de l'expoſant de l'une de ces trois raiſons.*

Et comme la raiſon quelconque . . . $a^3 : b^3$ de deux cubes, eſt une raiſon triplée formée par la multiplication

multiplication des trois raiſons égales . . . $\begin{cases} a : b \\ a : b \\ a : b \end{cases}$ on conclura que l'*expoſant de la raiſon des cubes de deux grandeurs eſt le cube de l'expoſant de la raiſon ſimple formée de la comparaiſon de ces deux grandeurs.*

ARTICLE IV.

Propriétés de la proportion géométrique.

252. *Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a . . . $a : b :: c : d$, on pourra conclure . . . . . $ad = bc$.

En effet, en ſuppoſant que l'expoſant quelconque des raiſons de cette proportion eſt déſigné par r, cette proportion pourra ſe changer en celle-ci $br : b :: dr : d$ (n°. 246), & les produits ad, bc ſe changeront en ceux-ci brd, bdr.

Or $brd = bdr$, puiſque ces produits ſont compoſés des mêmes quantités : donc $ad = bc$.

253. D'où il ſuit que *dans la proportion continue le produit des extrêmes eſt égal au quarré de la moyenne.*

C'eſt-à-dire, qu'étant donné . . $\therefore a : b : c$, on aura . . . . . $ac = b^2$.

En effet, le moyen proportionnel b tenant lieu des deux moyens, ſon quarré b^2 repréſentera le produit des moyens ; ainſi le produit des extrêmes étant égal au produit des moyens dans toute proportion géométrique, le produit des extrêmes ſera égal au quarré de la moyenne dans la proportion géométrique continue.

254. *Si quatre grandeurs ſont telles que le produit des extrêmes ſoit égal au produit des moyens, elles formeront une proportion géométrique.*

C'eſt-à-dire, qu'étant données les grandeurs a, b, c, d,

ſi . . . . . $ad = bc$,

on pourra conclure . . . . . $a : b :: c : d$.

En effet, ſi ad étant égal à bc, les grandeurs a, b, c, d n'étoient point proportionnelles, on pourroit les rendre telles en augmentant ou en diminuant le premier antécédent a, de façon qu'il contînt ſon conſéquent b comme le ſecond antécédent c contient ſon conſéquent d; & comme alors le produit des extrêmes ſeroit plus grand ou plus petit que le produit ad, & par conſéquent plus grand ou plus petit que bc, puiſque l'on ſuppoſe $ad = bc$, on auroit une proportion dans laquelle le produit des extrêmes ne ſeroit pas égal au produit des moyens, ce qui eſt abſurde (n°. 252).

Donc ſi on a $ad = bc$, on a néceſſairement $a : b :: c : d$.

255. D'où il ſuit, 1°. *qu'étant donnée la proportion* . . . . . $a : b :: c : d$, *on aura encore une proportion en alternant, en permutant, en compoſant, & en ſouſtrayant.*

C'eſt-à-dire, que l'on aura encore.

$$\begin{cases} a : c :: b : d & \text{en alternant.} \\ b : a :: d : c & \text{permutant.} \\ a+b : b :: c+d : d \\ a+b : a :: c+d : c & \text{compoſant.} \\ a-b : b :: c-d : d \\ a-b : a :: c-d : c & \text{ſouſtrayant.} \end{cases}$$

On le démontrera en faiſant voir que dans chacun de ces changemens le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens (n°. 254), ce qui eſt évident.

Car le produit des extrêmes & celui des moyens ſont . . . .

	Produit des extrêmes.	Produit des moyens.
lorſqu'on alterne	ad	bc
lorſqu'on permute	bc	ad
lorſqu'on compoſe	$ad+bd$	$bc+bd$
	$ac+bc$	$ac+ad$
lorſqu'on ſouſtrait	$ad-bd$	$bc-bd$
	$ac-bc$	$ac-ad$

Or ces produits ſeront reconnus aiſément égaux, ſi on fait attention qu'en ſuppoſant la proportion $a : b :: c : d$, on a dès-lors (n°. 252) $ad = bc$.

256. 2°. *Dans une ſuite de raiſons égales, la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens comme l'un quelconque des antécédens de cette ſuite eſt à ſon conſéquent.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a $a : b :: c : d :: m : n$, on aura en faiſant la ſomme des antécédens & celle des conſéquens . . . $a + c + m : b + d + n :: a : b$.

Pour cela il ſuffit (n°. 254) que l'on ait $ab + bc + bm$ produit des extrêmes $= ab + ad + an$ produit des moyens; ce qui eſt évident, car $ab = ab$, $bc = ad$ à cauſe de la proportion (n°. 252) $a : b :: c : d$, & enfin $bm = an$ à cauſe de la proportion $a : b :: m : n$.

257. 3°. *Lorſque deux ou pluſieurs proportions auront le même expoſant, les ſommes de leurs termes correſpondans ſeront proportionnelles.*

C'eſt-à-dire, que ſi on ſuppoſe le même expoſant dans les proportions . . . $\begin{cases} a : b :: c : d \\ e : f :: g : h \end{cases}$ on aura en ajoutant les termes correſpondans . $a + e : b + f :: c + g : d + h$.

En effet, puiſque les proportions propoſées ont le même expoſant, on pourra compoſer avec elles ces nouvelles proportions . . $\begin{cases} a : b :: e : f \\ c : d :: g : h \end{cases}$ tirant de la premiere (n°. 156) $a + e : b + f :: a : b$, de la ſeconde . . . $c + g : d + h :: c : d$ ou $:: e : b$, on conclura (n°. 245) . . $a + e : b + f :: c + g : d + h$.

258. 4°. *Lorſque l'on multipliera, ou que l'on diviſera les termes d'une proportion par les termes correſpondans d'une autre proportion, les produits ou les quotiens ſeront proportionnels.*

C'eſt-à-dire, qu'étant données les deux propor-

tions . . . . . $\begin{cases} a:b::c:d \\ e:f::g:h, \end{cases}$

on aura, en multipliant les termes correſpondans,

. . . . . $ae:bf::cg:dh.$

Et en diviſant les termes de la premiere par les termes correſpondans de la ſeconde . . $\frac{a}{e}:\frac{b}{f}::\frac{c}{g}:\frac{d}{h}.$

En effet, puiſque l'on ſuppoſe $a:b::c:d$, on aura (n°. 252) . . . . . $ad=bc.$

Puiſque l'on ſuppoſe $e:f::g:h$ . . . . $eh=gf.$

Et par conſéquent en multipliant ou en diviſant les membres de la premiere égalité par les membres correſpondans de la ſeconde,

on aura (*axiome* 9) . . . . $\begin{cases} ad\times ch=bc\times gf \\ \frac{ad}{eh}=\frac{bc}{gf}. \end{cases}$

Mais les membres de la premiere de ces deux nouvelles égalités ſont le produit des extrêmes & celui des moyens, après que l'on a multiplié les termes correſpondans des proportions données.

Les membres de la ſeconde ſont le produit des extrêmes & celui des moyens, après que l'on a diviſé les termes de la premiere proportion par ceux de la ſeconde.

Le produit des extrêmes eſt donc, après ces changemens, égal à celui des moyens.

Il y a donc proportion (n°. 254).

259. 5°. *Lorſque quatre grandeurs ſont proportionnelles, leurs quarrés ou leurs cubes, leurs racines quarrées ou cubiques, en général leurs puiſſances quelconques de même degré, ou leurs racines de même degré, ſont proportionnelles.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a . . $a:b::c:d,$ on conclura en déſignant par p le degré quelconque

d'une puiſſance ou d'une racine $\begin{cases} a^p : b^p :: c^p : d^p \\ \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} :: \sqrt[p]{c} : \sqrt[p]{d}. \end{cases}$

Car puiſque l'on ſuppoſe $a : b :: c : d$, on conclut (n°. 252) . . . . . $ad = bc$, d'où l'on tire, en élevant chaque membre à la puiſſance p (*axiome* 11) . . $a^p d^p = b^p c^p$, ou en extrayant de chaque membre la racine p (*axiome* 11) . . . $\sqrt[p]{ad} = \sqrt[p]{bc}$.

Mais les membres de l'équation $a^p d = b^p c$ ſont le produit des extrêmes & celui des moyens, lorſqu'on a élevé les termes de la proportion $a : b :: c : d$ à la puiſſance p.

Les membres de la ſeconde équation $\sqrt[p]{ad} = \sqrt[p]{bc}$, ſont le produit des extrêmes & celui des moyens, lorſqu'on a abaiſſé à la racine p les termes de la proportion $a : b :: c : d$.

Donc lorſqu'on éleve à une puiſſance d'un même degré, ou que l'on abaiſſe à une racine d'un même degré quelconque des grandeurs proportionnelles, le produit des extrêmes eſt égal à celui des moyens; par conſéquent il y a proportion (n°. 254).

260. 6°. *Lorſque quatre grandeurs ſont en proportion, le produit des antécédens & celui des conſéquens ſont entr'eux comme les quarrés des termes de l'une ou l'autre des raiſons qui compoſent la proportion.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a . . $a : b :: c : d$, on conclura . . . . . $ac : bd :: a^2 : b^2$.

Pour cela, il ſuffit que $ac \times b^2$, produit des extrêmes, ſoit égal à $a^2 \times bd$, produit des moyens; c'eſt-à-dire, que l'on ait (n°. 254) . . $acb^2 = a^2 bd$, ce qui eſt évident.

Car $bc = ad$, parce que (n°. 252) l'on ſuppoſe . . . . . $a : b :: c : d$.

Donc (*axiome* 11) en multipliant chaque membre de l'égalité $bc = ad$, par la même quantité ab, l'on aura . . . . . $acb^2 = a^2bd$.

261. 7°. *Dans toute progreſſion géométrique le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond comme le premier terme eſt au troiſieme.*

Et le cube du premier terme eſt au cube du ſecond comme le premier terme eſt au quatrieme.

C'eſt-à-dire, qu'étant donnée la progreſſion . . . . . $\div\!\!\div a : b : c : d : e : f$, &c.

1°. on aura . . . . $a^2 : b^2 :: a : c$.

Car en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, on a a^2c pour l'un, & ab^2 pour l'autre; & ces produits étant diviſés par la même quantité a, ſont entr'eux (n°. 247) comme $ac : b^2$; or parce que l'on ſuppoſe $\div\!\!\div a : b : c$, on a (n°. 253) $ac = b^2$, donc $a^2c = ab^2$. Donc (n°. 254) $a^2 : b^2 :: a : c$.

2°. On aura . . . . $a^3 : b^3 :: a : d$.

Il ſuffira encore (n°. 254) de faire voir que a^3d, produit des extrêmes, eſt égal à ab^3, produit des moyens, ou ſimplement (n°. 247) que $a^2d = b^3$; ce qui eſt vrai.

Car { parce que l'on ſuppoſe $\div\!\!\div a : b : c$, on a (n°. 253) . . . . . $ac = b^2$. parce que l'on ſuppoſe $a : b :: c : d$, on a . . . . . $ad = bc$.

Donc en multipliant les membres correſpondans de ces égalités, on aura (*axiome* 11) $a^2dc = b^2c$; ce qui ſe réduira, en diviſant par c, à $a^2d = b^3$.

SECTION II.

Les lignes proportionnelles conſidérées dans les eſpaces paralleles.

Les lignes coupées proportionnellement.

Les conditions qui rendent les triangles ſemblables.

DÉFINITIONS.

262. On nomme *eſpace parallele* un eſpace indéfini compris entre deux droites paralleles.

263. On nomme *ſegmens d'une droite* les parties dans leſquelles une droite eſt diviſée.

264. *Deux triangles ſemblables* ont les angles égaux chacun à chacun, & les côtés oppoſés aux angles égaux proportionnels: l'on verra dans la ſuite que l'une de ces deux conditions entraîne l'autre.

Les côtés dans les triangles ſemblables qui ſont oppoſés aux angles égaux, ſont dits *côtés homologues.*

Pour mieux diſtinguer dans les triangles ſemblables les angles égaux & les côtés homologues, on exprimera les deux triangles par les mêmes lettres, grandes & petites, & on les nommera & on les écrira de façon que les lettres qui déſignent les ſommets d'angles égaux occupent la même place.

Par exemple, les expreſſions A B C, *a b c* déſignent deux triangles ſemblables, dans leſquels l'angle A = l'angle *a*, l'angle B = l'angle *b*, l'angle C = l'angle *c*, & dans leſquels les côtés A B & *a b*, B C & *b c*, A C & *a c*, ſont homologues.

ARTICLE I.

Les lignes conſidérées dans les eſpaces paralleles.

265. PROPOSITION. *Deux obliques* AB, ab *étant également inclinées, l'une dans l'eſpace parallele* ABCD, *l'autre dans l'eſpace parallele* abcd, *elles ont entr'elles le même rapport que les perpendiculaires* CD, cd *compriſes dans les mêmes eſpaces paralleles.*

C'eſt-à-dire, que l'on a . . AB : ab :: CD : cd.

PRÉPARATION.

On aura démontré la proportion dont il s'agit, ſi ayant diviſé la perpendiculaire *cd* en parties égales qui ſoient aliquotes de la perpendiculaire CD; & ayant de même diviſé l'oblique *ab* en un même nombre de parties égales, on fait voir que l'oblique AB contient autant de parties égales de l'oblique *ab* que la perpendiculaire CD contient de parties égales de la perpendiculaire *cd*.

On le déduira aiſément, de ce que l'on ſuppoſe les obliques AB, *ab* dans des eſpaces paralleles & également inclinées dans ces eſpaces.

Pour aider l'imagination, on ſuppoſera que la perpendiculaire *cd* étant diviſée aux points *e*, *f*, *g*, en quatre parties égales, la perpendiculaire CD contient 6 de ces parties; & l'on aura à démontrer que l'oblique *ab* étant ainſi diviſée en quatre parties égales, l'oblique AB contient de même préciſément 6 de ces parties.

DÉMONSTRATION.

Des points *e*, *f*, *g* de diviſion de la perpendiculaire *cd* ſoient menées aux lignes *ac*, *bd* des paralleles *ek*, *fl*, *gm* qui coupent l'oblique *ab*; & des

points E, F, G, H, I de diviſion de la perpendiculaire CD, ſoient menées aux droites AC, BD les paralleles EK, FL, GM, HN, IO qui coupent l'oblique AB.

1°. L'oblique *ab* ſera coupée en quatre parties comme la perpendiculaire *cd*, puiſque les deux droites ſont diviſées par les mêmes paralleles ; de plus les parties *ak*, *kl*, *lm*, *mb* de cette oblique *ab* ſeront égales entr'elles : car ſi des extrêmités *b*, *m*, *l*, *k* de ces parties, on abaiſſe les perpendiculaires *bt*, *ms*, *lr*, *kq* ſur les paralleles qui vont aux autres extrêmités de ces mêmes parties, on aura les triangles rectangles *bmt*, *lms*, *klr*, *akq* parfaitement égaux, (n°. 58) à cauſe de l'égalité des angles de même côté *a*, *k*, *l*, *m* (n°. 64), & des angles droits *t*, *r*, *s*, *t*, & des côtés *qk*, *lr*, *sm*, *bt* égaux (n°. 95) aux parties *ce*, *ef*, *fg*, *gd* de la perpendiculaire *cd*, leſquelles parties ſont égales par la ſuppoſition. Les hypothenuſes *ak*, *kl*, *lm*, *mb* de ces triangles rectangles ſont donc égales entr'elles : or ces hypothenuſes ſont les parties de l'oblique *ab*.

On démontrera par les mêmes raiſonnemens, que l'oblique AB du premier eſpace parallele, ſera diviſée par les paralleles EK, FL, GM, HN, IO en ſix parties, & de plus que ces 6 parties AK, KL, LM, MN, NO, OB ſont égales entr'elles.

2°. Les parties de l'oblique AB ſeront égales aux parties de l'oblique *ab*.

Car les parties de la premiere étant égales entr'elles, de même que les parties de la ſeconde, il ſuffit qu'une partie AK de la premiere ſoit démontrée égale à une partie *ak* de la ſeconde ; & ceci eſt évident, puiſque ces deux parties ſont les hypothenuſes de deux triangles rectangles AKQ, *akq* entiérement égaux, à cauſe & des angles égaux A & *a* que font les obliques

AB, *ab* que l'on ſuppoſe également inclinées, & des angles droits Q, *q*, & des côtés KQ, *kq* égaux aux parties correſpondantes EC, *ec* des perpendiculaires CD, *cd*, leſquelles parties ſont égales par la conſtruction.

Donc l'oblique AB contient 6 parties égales telles que l'oblique *ab* en contient 4; de même que la perpendiculaire CD contient 6 parties égales telles que la perpendiculaire *cd* en contient 4.

Donc l'on a . . . . AB : *ab* :: CD : *cd*.

Ce qu'il falloit démontrer.

REMARQUE.

266. Si l'on ſuppoſoit la perpendiculaire *cd* diviſée en tout autre nombre de parties égales toujours aliquotes de la perpendiculaire CD, on prouveroit de même que l'oblique AB contiendroit autant de parties égales de l'oblique *ab*, que la perpendiculaire CD en renfermeroit de la perpendiculaire *cd*, en ſuppoſant cette perpendiculaire *cd* & l'oblique *ab* diviſées en des nombres égaux de parties égales.

120. Que ſi l'on ſuppoſoit la perpendiculaire *cd* incommenſurable avec la perpendiculaire CD, c'eſt-à-dire, n'ayant aucune aliquote qui fût contenue exactement dans la perpendiculaire CD; alors, en diviſant cette perpendiculaire *cd* en des parties égales infiniment petites, la droite CD renfermeroit un nombre de ces parties égales avec un reſte XD qui ſeroit une fraction d'un infiniment petit; & l'on prouveroit de même que l'oblique *ab* étant diviſée en autant de parties égales infiniment petites que la perpendiculaire *cd*, l'oblique AB également inclinée renfermeroit autant de ces parties égales que la perpendiculaire CD en renfermeroit de la perpendiculaire *cd*; & auſſi avec

un reſte XB qui ſeroit une fraction d'une partie infiniment petite de l'oblique *a b*.

Donc, dans tous les cas poſſibles, les obliques également inclinées dans différens eſpaces paralleles ſont entr'elles comme les perpendiculaires compriſes dans ces eſpaces.

ARTICLE II.

Les lignes coupées proportionnellement.

267. PROPOSITION. *Si on coupe les côtés* AC, BC *d'un triangle quelconque* ACB *par une ou pluſieurs droites* HK, EG *paralleles à la baſe* AB. *Fig.* 121.

1°. *Les ſegmens du côté* AC *ſeront proportionnels aux ſegmens correſpondans du côté* BC. C'eſt-à-dire, que l'on aura CH : CK :: HE : KG :: EA : GB, ou en compoſant enſemble les antécédens, & enſemble les conſéquens (n°. 242) . . . . . CH : HE : EA :: CK : KG : GB.

2°. *Les côtés entiers* AC, BC *ſeront proportionnels à leurs ſegmens correſpondans.*

C'eſt-à-dire, que l'on aura { AC : BC :: CH : CK :: HE : KG : EA : GB ou (n°. 242) AC : CH : HE : EA :: BC : CK : KG : GB.

3°. *Le triangle* ABC *donné, & le triangle* HCK *retranché par la parallele quelconque* HK, *ſeront ſemblables.*

PRÉPARATION.

Comme le côté AC & ſes ſegmens AE, EH, HC ſont (n°. 64) également inclinés ſur les paralleles AB, EG, HK, & qu'il en eſt de même du côté BC & de ſes ſegmens, il eſt évident qu'en menant par le ſommet C des triangles ACB une parallele PR, & une perpendiculaire CD à la baſe AB, on pourra appliquer la propriété des obliques également inclinées

dans différens eſpaces paralleles (n°. 265) : la propoſition dont il s'agit en eſt une ſuite néceſſaire.

DÉMONSTRATION.

1°. En comparant les ſegmens de chaque côté AC, BC avec les ſegmens de la perpendiculaire CD, on aura (n°. 256) $\left\{\begin{matrix} CH : HE : EA \\ CK : KG : GB \end{matrix}\right.$ :: CI : IF : FD, d'où l'on tire (n°. 245) CH : HE : EA :: CK : KG : GB.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

121. 2°. En comparant chaque côté AC, BC & leurs ſegmens avec la perpendiculaire CD & ſes ſegmens correſpondans, on aura (n°. 256) . . . . .

$\left\{\begin{matrix} AC : CH : HE : EA \\ BC : CK : KG : GB \end{matrix}\right.$ :: CD : CI : IF : FD,

d'où l'on tire (n°. 245) AC : CH : HE : EA :: BC : CK : KG : GB.

Ce qu'il falloit 2°. *démontrer.*

3°. Le triangle ACB donné, & le triangle HCK retranché par la parallele HK, ſont ſemblables.

C'eſt-à-dire que, 1°. ces deux triangles ont les trois angles égaux chacun à chacun ; ce qui eſt évident : car l'angle C étant commun, il eſt égal dans les deux ; & en outre les angles CHK & CAB, CBA & CKH ſont égaux comme angles de même côté, la droite HK étant ſuppoſée parallele à AB (n°. 64).

2°. Dans ces mêmes triangles les côtés homologues ou oppoſés aux angles égaux, à ſavoir AC & HC, BC & KC, AB & HK ſont proportionnels.

Pour le faire voir, ſoit menée par le point K la droite KM parallele au côté AC, & terminée en M à la rencontre de la baſe AB.

D'abord parce que HK eſt parallele à la baſe AB, on vient de trouver . . AC : CH :: BC : CK.

Parce que KM eſt parallele au côté AC, on aura

encore pour les mêmes raiſons, BC : CK :: AB : AM.

Ou (parce que dans le parallélogramme AK, AM = HK) . . . . . BC : CK :: AB : AK.

Donc (n°. 245) AC : CH :: BC : CK :: AB : HK.

C'eſt-à-dire, que le triangle ACB & le triangle HCK retranché par la parallele HK, ont leurs angles égaux chacun à chacun, & leurs côtés homologues proportionnels, & ſont par conſéquent (n°. 264) ſemblables.

Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

CONVERSE.

268. *Si les côtés* AC, BC *d'un triangle quelconque* ACB *ſont coupés par la droite* KH, *de façon que les ſegmens de l'un ſoient proportionnels aux ſegmens correſpondans de l'autre, ou, ce qui eſt la même choſe, de façon que les côtés entiers ſoient proportionnels à leurs ſegmens correſpondans.* Fig. 122

C'eſt-à-dire, de façon que l'on ait AC : CH :: BC : CK, *cette droite* KH *ſera parallele à la baſe* AB *du triangle.*

En effet, ſi HK n'étoit pas parallele à la baſe AB, on pourroit par le point H ou K, par exemple, par le point K, mener une droite KE parallele à la baſe AB; & cette parallele KE rencontrant le côté AC en un point E au-deſſus ou au-deſſous du point H, (ce qui eſt CE < ou > CH) donneroit (n°. 267) . . . . . BC : CK :: AC : GE,

& parce que l'on ſuppoſe BC : CK :: AC : CH,

on concluroit (n°. 245) AC : CE :: AC : CH,

d'où l'on déduiroit (n°. 244) CE = CH; ce qui eſt abſurde.

Donc on ne peut mener par le point K à la baſe AB une parallele qui ſoit différente de la ligne KH. Donc, &c.

Conséquence de la propoſition directe.

Fig. 124. 269. *Si par le ſommet* B *d'un triangle* ABC *quelconque, & par différens points* D, E *de la baſe* AC, *on tire des droites* BR, BQ *indéfinies, toute droite, telle que* FI *parallele à la baſe* AC, *& compriſe entre les côtés* AB, BC, *ou entre leurs prolongemens, ſera coupée par ces lignes en parties proportionnelles aux ſegmens de la baſe* AC.

C'eſt-à-dire, que l'on aura FG:AD::GH:DE::HI:EC.

En effet, puiſque FI eſt parallele à la baſe AB, le triangle FBG eſt ſemblable au triangle ADB (n°.267), ce qui donne . . . BG : BD :: FG : AD.

Pour les mêmes raiſons le triangle GBH eſt ſemblable au triangle DBE,
d'où l'on tire BG : BD :: GH : DE :: BH : BE.

Le triangle HBI eſt ſemblable au triangle EBC, d'où l'on tire . . . BH : BE :: HI : EC.

Et comme toutes ces raiſons ſont égales entr'elles, ſi l'on prend celles qui ſont formées de la comparaiſon des ſegmens de la droite FI avec les ſegmens correſpondans de la baſe AC,
on aura . . FG : AD :: GH : DE :: HI : EC.

Article III.

Les conditions qui rendent les triangles ſemblables.

Fig. 123. 270. Propoſition. *Deux triangles* ABC, abc *ſont ſemblables,*

1°. *Lorſqu'ils ont leurs angles égaux chacun à chacun.*

2°. *Lorſqu'un angle quelconque* B *de l'un eſt égal à un angle* b *de l'autre, & que les côtés* AB, BC *de l'angle* B *ſont proportionnels aux côtés* ab, bc *de l'angle* b.

3°. *Lorſque les trois côtés* AB, BC, AC *du premier triangle* ABC *ſont proportionnels aux trois côtés* ab, bc, ac *du ſecond triangle* abc.

PRÉPARATION.

Etant prévenu (n°. 267) que lorſqu'on coupe un triangle donné par une parallele à la baſe de ce triangle, le triangle retranché par cette parallele eſt ſemblable au triangle donné, on conçoit aiſément que pour démontrer la propoſition dont il s'agit, il ſuffit de faire voir que dans les trois cas propoſés, le moindre *abc* des deux triangles donnés peut être regardé comme un triangle MBN retranché de l'autre triangle ABC par une droite MN parallele à la baſe AC.

DÉMONSTRATION.

Pour le premier cas, *dans lequel on ſuppoſe que les angles des triangles* ABC, abc *ſont égaux chacun à chacun, à ſavoir*, A = a, B = b, C = c.

Soit priſe depuis le ſommet B du triangle ABC ſur le côté AB une partie BM égale au côté homologue *ab* du triangle *abc*, & par le point M ſoit menée à la baſe AC la parallele MN terminée à la rencontre du côté BC. *Fig.* 12.

A cauſe de la parallele MN, le triangle MBN eſt ſemblable au triangle ABC (n°. 267).

Mais le même triangle MBN eſt encore entiérement égal au triangle *abc* (n°. 58); car le côté MB de l'un eſt égal au côté *ab* de l'autre par la conſtruction.

Et les angles ſur ces côtés MB, *ab* ſont auſſi égaux; à ſavoir, B = *b* par la ſuppoſition, & l'angle BMN = l'angle *bac*, puiſque (n°. 64) BMN eſt égal à l'angle BAC (MN étant parallele à AC), & que l'angle BAC = l'angle *bac* par la ſuppoſition.

Donc le triangle *abc* eſt auſſi ſemblable au triangle ABC; c'eſt-à-dire, que les angles A & *a*, B & *b*, C & *c* étant égaux, on aura encore . . . . .

. . . . . AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac*.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

[illegible] *suppose l'angle* [illegible] *les côtés autour de ses angles propor-*
[illegible] . . . AB : ab :: BC : bc,
[illegible] B du triangle ABC sur le
[illegible] BM, BN égales aux côtés homo-
[illegible] du triangle abc, & soient joints les
[illegible] par la droite MN.

[illegible] . . . AB : *ab* :: BC : *bc*,
[illegible] BM = *ab*, BN = *bc*, on aura encore
. . . . . AB : BM :: BC : BN.

[illegible] que les côtés du triangle ABC seront
[illegible] proportionnellement par la droite MN. Cette
[illegible] MN sera donc parallèle à la base AC (n°. 268),
[illegible] triangle MBN sera semblable au triangle ABC
[illegible].

Les deux triangles MBN, abc, ayant par la supposition l'angle B = l'angle *b*, & par la construction les côtés MB & *ab*, BN & *bc* égaux, sont entièrement égaux [illegible].

Donc le triangle abc sera aussi semblable au trian-
[illegible].

[illegible] que l'on ait l'angle A = l'angle *a*,
[illegible] = l'angle . . & en outre . . . . .
AB [illegible] : BC : *bc* :: AC : *ac*.

[illegible] *dans les trian-*
[illegible] . . AB [illegible] . BC : *bc* :: AC : *ac*,
[illegible] côté AB du triangle ABC, depuis le
[illegible] B la partie MB égale au côté homologue
[illegible] . & la limite par le point M à la
[illegible] parallèle MN terminée à la rencontre
[illegible].

[illegible] de la parallèle MN, le triangle MBN
[illegible] cette construction, est semblable au
[illegible] (n°. [illegible].
[illegible] le triangle MBN est encore entiére-
[illegible] ngle abc. Car

Car parce que le triangle MBN eſt ſemblable au triangle ABC ;

on a (n°. 264) AB : BC : AC :: BM : BN : MN.

Par la ſuppoſition on a encore AB : BC : AC :: *ab* : *bc* : *ac*.

Donc (n°. 245) *ab* : *bc* : *ac* :: BM : BN : MN.

Et parce que *ab* = BM par la conſtruction, on conclura (n°. 244) *bc* = BN, *ac* = MN.

C'eſt-à-dire, que les triangles *abc*, MBN ont leurs trois côtés égaux chacun à chacun, & ſont par conſéquent (n°. 58) parfaitement égaux.

Donc le triangle *abc* eſt auſſi ſemblable au triangle ABC, c'eſt-à-dire, qu'ayant ſuppoſé . . . . . AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : *ac*, on aura encore l'angle A = l'angle *a*, l'angle B = l'angle *b*, l'angle C = l'angle *c*.

Ce qu'il falloit 3°. *démontrer.*

CONSÉQUENCES.

271. Premiere. *On aura démontré dans la ſuite que deux triangles ſont ſemblables lorſque l'on aura fait voir que deux angles de l'un ſont égaux à deux angles de l'autre chacun à chacun.*

Car on ſait (n°. 144) que dans deux triangles l'égalité de deux angles de l'un de ces triangles à deux angles de l'autre, donne l'égalité du troiſieme angle de chacun.

272. Seconde. *Deux triangles* BAC, abc *iſoſceles ſeront reconnus ſemblables lorſqu'on ſuppoſera ou que l'on démontrera qu'ils ont un angle égal placé de la même façon.* Fig. 123

En effet, ſuppoſons que les triangles ABC, *abc* ſoient iſoſceles ſur les baſes AC, *ac*, les angles A, C dans le premier, oppoſés aux côtés égaux AB, BC étant égaux (n°. 147), de même que les angles *a*, *c*,

oppoſés dans le ſecond aux côtés égaux *ab*, *bc*, il eſt évident 1°. que ſi l'un des angles ſur la baſe, dans l'un de ces triangles, eſt égal à l'un des angles ſur la baſe dans l'autre triangle;

Si, par exemple, on ſuppoſe l'angle A = l'angle *a*, on aura ainſi l'angle C = l'angle *c*, & ces triangles ABC, *abc* ſeront ſemblables par le n°. 271.

Si on ſuppoſe que l'angle B compris dans le premier triangle entre les deux côtés égaux, eſt égal à l'angle *b* compris auſſi dans le ſecond triangle entre les côtés égaux, comme les différences de chaque angle B, *b*, à 180 d. ſeront égales de part & d'autre, & que dans chacun des triangles iſoſceles ABC, *abc*, chacun des deux angles égaux ſur la baſe vaut la moitié de cette différence, on aura encore A=*a*, C=*c*, & par conſéquent (n°. 270) ces triangles iſoſceles ABC, *abc* ſeront ſemblables.

§. 125. 273. Troiſieme. *Deux triangles* ABC, abc *ſont ſemblables lorſqu'étant dans un même plan les trois côtés de l'un ſont paralleles ou perpendiculaires aux trois côtés de l'autre chacun à chacun.*

Car 1°. lorſque les trois côtés du triangle *abc* ſont paralleles aux trois côtés du triangle ABC; à ſavoir, *ac* à AC, *ab* à AB, *bc* à BC, il eſt évident qu'en prolongeant le côté *ac* à la rencontre du côté AB prolongé, s'il eſt néceſſaire; à cauſe des paralleles AB, *ab*, on aura l'angle *x* = l'angle *bac*, & l'angle *y* = l'angle *bca* (n°. 64).

Et comme les paralleles *xy* & AC donneront l'angle *x* = l'angle BAC, & l'angle *y* = l'angle BCA, on conclura (*axiome* 9) l'angle BAC = l'angle *bac*, & l'angle BCA = l'angle *bca*: ainſi les triangles ABC, *abc* ayant leurs côtés paralleles, ont dès-lors leurs angles égaux chacun à chacun, & ſont par conſéquent ſemblables (n°. 270).

2°. Lorſque les triangles ABC, *abc* ont leurs côtés perpendiculaires chacun ſur chacun; à ſavoir *ac* ſur AC, *ab* ſur AB, *bc* ſur BC; Fig. 12

Il eſt viſible que l'un, par exemple, *ac* des côtés du triangle *abc* devenant parallele à ſon correſpondant AC du triangle ABC, chaque autre côté *ab*, *bc* deviendra parallele à ſon correſpondant AB, BC: or on vient de faire voir que les triangles ABC, *abc* ſont ſemblables lorſqu'ils ont leurs côtés paralleles. Donc ils ſont auſſi ſemblables lorſque leurs côtés ſont perpendiculaires chacun ſur chacun.

SECTION III.

Les figures ſemblables conſidérées dans leurs diviſions en parties ſemblables.

Les points ſemblablement poſés à l'égard des lignes droites, & à l'égard des figures ſemblables.

Le rapport des contours des figures ſemblables.

DEFINITIONS.

274. DEUX figures ſont dites *ſemblables* lorſqu'elles ont un même nombre d'angles égaux chacun à chacun, & que les côtés autour de ces angles égaux ſont directement proportionnels.

On appelle *côtés homologues* dans les figures ſemblables, les côtés qui ſont adjacens aux angles égaux.

Ainſi la figure ABCDE eſt ſemblable à la figure *abcde*, ſi les angles A, B, C, D, E de la premiere ſont égaux aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e* de la ſeconde chacun à chacun, & ſi en outre les côtés homologues, c'eſt-à-dire, les côtés adjacens aux angles égaux; à ſa- Fig. 1

voir, AB & *ab*, BC & *bc*, CD & *cd*, DE & *de*, &c. ſont directement proportionnels, enſorte que l'on ait AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: EA : *ea*.

fig. 129. 275. Selon cette définition, *deux poligones réguliers & d'un même nombre de côtés, par exemple*, ABCDEF, abcdef, *ſont des figures ſemblables.*

Car les poligones ABCDEF, *abcdef* étant réguliers, & d'un même nombre de côtés, les angles FAB, ABC, &c. du premier poligone ſeront évidemment égaux aux angles *fab*, *abc*, &c. du ſecond poligone; de plus les côtés AB, BC, CD, &c. du premier poligone étant égaux entr'eux, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, &c. du ſecond étant auſſi égaux entr'eux, les côtés du premier poligone ſeront encore directement proportionnels aux côtés du ſecond.

Les cercles ſont auſſi des figures ſemblables, parce qu'on peut les regarder comme des poligones réguliers d'une infinité de côtés (n°. 225), & par conſéquent d'un même nombre de côtés.

Pour mieux diſtinguer dans la ſuite, dans deux figures ſemblables, les angles égaux & les côtés homologues, on repréſentera ces figures par les mêmes lettres, grandes & petites, & l'on obſervera de les nommer & de les écrire de façon que les lettres qui déſignent les ſommets des angles égaux tiennent la même place.

REMARQUE.

276. On a vu (n°. 270) que deux triangles qui ont leurs angles égaux chacun à chacun, ont dès-lors leurs côtés homologues proportionnels; & réciproquement que deux triangles qui ont leurs côtés homologues proportionnels, ont dès-lors leurs angles égaux chacun à chacun.

Il n'en eſt pas de même des figures rectilignes qui

s de trois côtés ; elles peuvent avoir 1°. leurs égaux ſans avoir leurs côtés proportionnels : mple, le quarré & le rectangle ont leurs an- aux, puiſque les angles de chacune de ces figu- t droits. Cependant il eſt viſible que les quatre 1 quarré qui ſont égaux entr'eux, ne peuvent ɔportionnels aux quatre côtés du rectangle qui égaux que deux à deux.

Les figures rectilignes qui ont plus de trois cô- vent avoir leurs côtés proportionnels ſans que les de l'une ſoient égaux aux angles de l'autre à chacun ; par exemple, le quarré & le rhombe ıcun leurs quatre côtés égaux, & par conſé- es quatre côtés du quarré ſont proportionnels ıtre côtés du rhombe. Cependant ces deux figu- nt pas leurs angles égaux chacun à chacun, ɔ les angles du quarré ſont droits, & que ceux mbe ne le ſont pas.

ARTICLE I.

ures ſemblables conſidérées dans leurs diviſions en parties ſemblables.

. PROPOSITION. *Si on diviſe deux figures ſem-* ABCDE, abcde *en triangles par des droites* Fig. 126. *les ſommets des angles égaux & correſpondans les triangles* ABC, ACD, ADE *de la pre- igure ſeront ſemblables aux triangles* abc, acd, ɔ *la ſeconde chacun à chacun.*

PRÉPARATION.

ſait (n°. 274) que pour que deux figures ſoient bles, il faut qu'elles aient un même nombre s égaux chacun à chacun, & que les côtés au- ɔs angles ſoient directement proportionnels. On

va voir qu'en conſéquence de ces conditions qui rendent les figures ABCDE, *abcde* ſemblables, les triangles correſpondans dans leſquels ces deux figures ont été diviſées par des droites menées des ſommets A, *a* d'angles correſpondans, ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels, & ſont par conſéquent (n°. 270) ſemblables.

DE'MONSTRATION.

1°. Les triangles correſpondans ABC, *abc* ſont ſemblables.

Car parce que les figures ABCDE, *abcde* ſont ſemblables, on a l'angle B = *b*, & les côtés autour de ces angles proportionnels; c'eſt-à-dire, AB:*ab*:: BC:*bc*.

2°. Les triangles correſpondans ACD, *acd* ſont ſemblables.

Car à cauſe de la ſimilitude des triangles ABC, *abc* . . . . . l'angle BCA = *bca*.

A cauſe de la ſimilitude des figures, l'angle BCD = *bcd*.

Et par conſéquent l'angle BCD — BCA = l'angle *bcd* — *bca*, ou l'angle ACD = *acd* (*axiome* 4).

Les côtés autour de ces angles ACD, *acd* ſont auſſi proportionnels.

Car à cauſe de la ſimilitude des figures . . . . . BC : *bc* :: CD : *cd*.

A cauſe de la ſimilitude des triangles ACD, *acd* . . BC : *bc* :: AC : *ac*, d'où l'on tire (n°. 245) . . . CD : *cd* :: AC : *ac*.

C'eſt-à-dire, que les triangles ACD, *acd* ont un angle égal compris entre des côtés proportionnels, & ſont par conſéquent ſemblables.

Ainſi des autres.

Donc ſi on diviſe deux figures ſemblables en triangles par des droites tirées des ſommets de deux angles égaux & correſpondans, les triangles de la pre-

miere figure ſeront ſemblables à ceux de la ſeconde chacun à chacun.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

278. *Si dans deux parallélogrammes ſemblables* AE, ae, *on mene des diagonales* BC, bc *par les ſommets* B, b *d'angles égaux de ces parallélogrammes ;* Fig. 12

Les triangles ABC, BEC, dans leſquels le premier parallélogramme ſera diviſé, ſeront ſemblables aux deux triangles *abc*, *bec* dans leſquels le ſecond ſera partagé, chacun à chacun (n°. 277).

279. Et comme les triangles ſemblables ABC, *abc* ſont les moitiés des parallélogrammes ſemblables AE, *ae* (n°. 59), on conclurra en général que *deux triangles ſemblables quelconques pourront toujours être conſidérés comme les moitiés de deux parallélogrammes ſemblables de même baſe & de même hauteur que ces triangles.*

CONVERSE.

280. *Deux figures rectilignes* ABCDE, abcde *ſont ſemblables lorſqu'elles renferment chacune un même nombre de triangles ſemblables placés de la même façon.* Fig. 12

PRÉPARATION.

On aura démontré la ſimilitude de ces figures, ſi de la ſimilitude des triangles qui les compoſent on déduit l'égalité des angles de ces figures chacun à chacun, & la proportion entre les côtés homologues de ces figures (n°. 274).

DÉMONSTRATION.

1°. A cauſe de la ſimilitude des triangles ABC,

va voir qu'en conſéquence de
dent les figures ABCD
triangles correſponda
ont été diviſées pa
A, *a* d'angles cor
pris entre des c
ſéquent (n°. 2

D

1°. Le
ſemblab

Car
ſemb
ces

ſ

gle B = l'angle
ngle BCA = bca
triangles ACD, acd
même façon à l'égard des
encore l'angle BCA = bca,
l'angle BCD = bcd
même maniere que les autr
ſont égaux chacun à chacun.
adjacens aux angles égaux A & a
&c. de ces figures ſont directeme

angles ABC, *abc* étant ſemblables,
AB : *ab* :: BC : *bc* :: AC : a
ACD,
étant ſemblables, AC : *ac* :: CD : *cd* :: AD : a
AED,
étant ſemblables, AD : *ad* :: DE : *de* :: EA : e
comme tous ces rapports ſont évidemme
entr'eux, en prenant ceux de ces rapports q
formés de la comparaiſon des côtés des figu
ABCDE, *abcde*, on aura . . . .
AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: EA : e

Donc, parce que les figures ABCDE, *abcde* ſo
compoſées d'un même nombre de triangles ſembl
blables chacun à chacun, & diſpoſés de la même façoi
les angles de ces figures ſont égaux chacun à chacu
& les côtés de ces figures, adjacens aux angles égau
ſont directement proportionnels, & par conſéque
ces figures ſont ſemblables.

CONSÉQUENCE.

281. *Une figure* ABCDE *étant donnée, & de l'*
A *de ſes angles ayant mené aux autres angles des dr*
tes indéfinies AC, AD, *pour la décompoſer en tria*
gles, ſi en partant d'un point f *pris ſur le côté* AB

olongement, on tire entre le côté AB *&* *la* C, *la droite* fg *parallele au côté* BC; *du les diagonales* AC, AD, *la droite* gh *côté* CD; *du point* h *entre la diagonale côté extrême* AE, *la droite* hi *parallele au* D, *il réſultera une figure* Afghi *ſemblable à la se propoſée* ABCDE.

Car les triangles qui compoſent ces figures ſont évimment ſemblables (n°. 267), & placés de la mêe façon, les uns à l'égard des autres, dans chacune ces figures, & par conſéquent (n°. 280) ces figu- *Afghi*, ABCDE ſont ſemblables.

ARTICLE II.

points ſemblablement placés à l'égard des lignes droites, & à l'égard des figures ſemblables.

DÉFINITIONS.

282. Deux points ſont dits *ſemblablement placés à* gard de deux droites ou des extrêmités de ces droi-, lorſque les diſtances de ces points aux extrêmités reſpondantes de ces droites ſont proportionnelles es droites.

283. Selon cette définition, 1°. *les extrêmités* A, *a* *Fig.* 127. *eux droites* AG, ac *ſont des points ſemblablement és à l'égard de ces droites.*

Car les diſtances des points A, *a* aux extrêmités reſpondantes C, *c*, étant égales à ces droites AC, , elles ſont évidemment entr'elles comme ces ites.

Les points du milieu de chacune de deux droites *Fig.* 128 , ac, *ſont des points ſemblablement placés à l'é- d de ces droites.*

Car les diſtances des points du milieu de chacune droites AC, *ac* aux extrêmités de ces droites,

a b c . . . . . l'angl· .equent pro·

En outre . . . l'a·

A cauſe de la ſimilitude de *viſeront propor-*
qui ſont ſuppoſés de l· *e façon qu'en com-*
triangles ABC, *abc*, on a *:ntes* A, a, *on ait*
d'où l'on déduit (*axiom*

On prouvera de la *:t poſés à l'égard de ces*
angles de ces figures

2°. Les côtés ac· AD *ad*
B & *b*, C & *c*, · . AC : : : *ac* :
proportionnels. DC *dc*.

Car les tria· . iſtances des points D, *d* aux
a (n°. 264) :tes des droites AC, *a c* ſeront
Les triang' :s droites ; par conſéquent ces
acd étant · .emblablement poſés à l'égard de
Les tri·
aed éta· .: *les points* B, b, *pris en-dehors de*
Et . ac, *ſeront ſemblablement poſés à l'é-*
ega· .., *ces points* B, b *ſeront les ſommets*
ſo· .. *ſemblables* ABC, abc, *conſtruits*
· .tes AC, ac, *& diſpoſés de la même*
: *dire, de maniere que les angles égaux*
.x *extrémités correſpondantes* A & a, C
:oites.

. , parce que les points B, *b* ſont ſembla-
·oſés à l'égard des droites AC, *ac*, on

$$\left.\begin{array}{l} AB : ab \\ BC : bc \end{array}\right\} :: AC : ac.$$

. riangles ABC, *abc* ont donc leurs trois cô-
.portionnels, & ſont par conſéquent (n°. 270)
.ables.

Réciproquement, *lorſque deux triangles* ABC, abc
. *ſemblables, & diſpoſés de la même façon ſur deux*
.tes AC, ac, *les ſommets* B, b *de ces triangles ſe-*
.. *des points ſemblablement placés, à l'égard des deux*
.tes AC, *ac*.

rte ſuppoſition, les diſtances des points Fig. 127
-és correſpondantes des droites AC,
nnelles aux droites AC, *ac* (n°.
les points B, *b* ſeront placés de
ard des droites AC, *ac* (n°. 282).

NSÉQUENCES.

.ıere. *Lorſque deux points, par exemple*
nt ſemblablement placés à l'égard de deux
nblables ABCDE, abcde, *ou, ce qui eſt*
:e choſe, à l'égard des côtés homologues AB & ab,
bc, CD & cd, *&c. ſi l'on mene dans chacune* Fig. 130
figures, de ces points G, g, *des droites aux ſom-*
es angles, les triangles qui ſeront correſpondans,
-dire, qui ſeront faits ſur des côtés homologues;
emple, les triangles AGB & agb, BGC & bgc,
ront ſemblables.
:te conſéquence n'eſt évidemment qu'une appli-
. du n°. 284.
5. Seconde. Réciproquement, *ſi deux points* G, g
:llement poſés à l'égard de deux figures ſemblables
DE, abcde, *qu'en menant des droites de ces* Fig. 131
aux ſommets des angles de chaque poligone, les
les qui réſulteront ſur les côtés homologues de ces
nes, par exemple, les triangles AGB & agb,
& bgc, *&c. ſoient ſemblables, & ſemblablement*
, ces points G, g *ſeront ſemblablement poſés à*
l des deux poligones.
:te conſéquence eſt viſiblement auſſi une appli-
ı du n°. 284.
7. Il ſuit, 1°. *que dans les poligones réguliers d'un*
nombre de côtés, par exemple ABCDEF, abcdef, Fig. 12
ıtres O & o *ſont des points ſemblablement poſés*
ard de ces poligones.
: en menant ſur les côtés homologues, par exem-

ſont les moitiés de ces droites, & par conſéquent proportionnelles à ces droites.

127. En général, *des points* D, d *qui diviſeront proportionnellement deux droites* AC, ac, *de façon qu'en commençant aux extrêmités correſpondantes* A, a, *on ait* AD : DC :: ad : dc.

Seront des points ſemblablement poſés à l'égard de ces droites AC, ac.

Car en compoſant, on aura (n°. 255) . . . $\frac{AD}{DC} : AC :: \frac{ad}{dc} : .$

C'eſt-à-dire, que les diſtances des points D, *d* aux extrêmités correſpondantes des droites AC, *a c* ſeront proportionnelles à ces droites ; par conſéquent ces points D, *d* ſeront ſemblablement poſés à l'égard de ces droites.

127. 284. 2°. *Lorſque les points* B, b, *pris en-dehors de deux droites* AC, ac, *ſeront ſemblablement poſés à l'égard de ces droites, ces points* B, b *ſeront les ſommets de deux triangles ſemblables* ABC, abc, *conſtruits ſur les deux droites* AC, ac, *& diſpoſés de la même façon ; c'eſt-à-dire, de maniere que les angles égaux ſoient faits aux extrêmités correſpondantes* A *&* a, C *&* c *de ces droites.*

En effet, parce que les points B, *b* ſont ſemblablement poſés à l'égard des droites AC, *ac*, on a (n°. 282) . . . $\frac{AB : ab}{BC : bc} :: AC : ac.$

Les triangles ABC, *abc* ont donc leurs trois côtés proportionnels, & ſont par conſéquent (n°. 270) ſemblables.

127. Réciproquement, *lorſque deux triangles* ABC, abc *ſeront ſemblables, & diſpoſés de la même façon ſur deux droites* AC, ac, *les ſommets* B, b *de ces triangles ſeront des points ſemblablement placés, à l'égard des deux droites* AC, *ac.*

Car, dans cette ſuppoſition, les diſtances des points B, *b* aux extrêmités correſpondantes des droites AC, *ac*, ſeront proportionnelles aux droites AC, *ac* (n°. 264); par conſéquent les points B, *b* ſeront placés de la même façon à l'égard des droites AC, *ac* (n°. 282). *Fig.* 11

CONSÉQUENCES.

285. Premiere. *Lorſque deux points, par exemple* G, g, *ſeront ſemblablement placés à l'égard de deux figures ſemblables* ABCDE, abcde, *ou, ce qui eſt la même choſe, à l'égard des côtés homologues* AB & ab, BC & bc, CD & cd, *&c. ſi l'on mene dans chacune de ces figures, de ces points* G, g, *des droites aux ſommets des angles, les triangles qui ſeront correſpondans, c'eſt-à-dire, qui ſeront faits ſur des côtés homologues; par exemple, les triangles* AGB & agb, BGC & bgc, *&c. ſeront ſemblables.* *Fig.* 1

Cette conſéquence n'eſt évidemment qu'une application du n°. 284.

286. Seconde. Réciproquement, *ſi deux points* G, g *ſont tellement poſés à l'égard de deux figures ſemblables* ABCDE, abcde, *qu'en menant des droites de ces points aux ſommets des angles de chaque poligone, les triangles qui réſulteront ſur les côtés homologues de ces poligones, par exemple, les triangles* AGB & agb, BGC & bgc, *&c. ſoient ſemblables, & ſemblablement placés, ces points* G, g *ſeront ſemblablement poſés à l'égard des deux poligones.* *Fig.* 1

Cette conſéquence eſt viſiblement auſſi une application du n°. 284.

287. Il ſuit, 1°. *que dans les poligones réguliers d'un même nombre de côtés, par exemple* ABCDEF, abcdef, *les centres* O & o *ſont des points ſemblablement poſés à l'égard de ces poligones.* *Fig.* 1

Car en menant ſur les côtés homologues, par exem-

ple, ſur les côtés AB & *ab*, les rayons obliques OA & *oa*, OB & *ob*, les triangles AOB, *aob* ſeront évidemment ſemblables (n°. 270), les angles AOB,
§. 129. *aob* au centre étant égaux dans les poligones réguliers d'un même nombre de côtés, de même que les angles OAB & *oab* à la baſe (n°. 177), ces triangles AOB, *aob* ſont encore viſiblement placés de la même façon. Donc (n°. 286) les centres O & *o* ſont ſemblablement placés à l'égard des côtés AB, *ab*, on prouvera de la même maniere qu'ils ſont ſemblablement placés à l'égard des autres côtés homologues de ces figures.

§. 126. 288. 2°. Comme l'on a fait voir (n°. 277) que ſi des ſommets de deux angles égaux & correſpondans quelconques de deux figures ſemblables ABCDE, *abcde*, par exemple, des ſommets A & *a*, on tire des droites aux autres angles, les triangles correſpondans ABC & *abc*, ACD & *acd*, &c. dans leſquels ces figures ſeront partagées, ſeront ſemblables; & que de plus ces triangles correſpondans ſont encore évidemment ſemblablement diſpoſés ſur les côtés homologues de ces figures, on conclurra (n°. 286) que *les ſommets de deux angles correſpondans quelconques* A & a *de deux poligones ſemblables* ABCDE, abcde, *ſont ſemblablement placés à l'égard des côtés* BC & bc, CD & cd, DE & de, *ſur leſquels les triangles correſpondans* ABC & abc, ACD & acd, *&c. ſont conſtruits*; & comme (n°. 283) ces mêmes points A & a ſont ſemblablement placés à l'égard des côtés homologues AB & *ab*, AE & *ae*, on conclurra en général, que *les ſommets de deux angles correſpondans quelconques* A & a *de deux figures ſemblables* ABCDE, abcde, *ſont ſemblablement poſés à l'égard des côtés homologues de ces figures, & par conſéquent à l'égard de ces figures.*

289. Troiſieme. *Deux points* B, b *pris en-dehors de deux droites* AC, ac *étant ſemblablement poſés à l'égard de ces droites, ſi de ces points* B, b *on mene des perpendiculaires* BD, bd *ſur les droites* AC, ac, *ces perpendiculaires détermineront ſur ces droites des points* D, d *qui ſeront ſemblablement poſés ſur ces droites.* Fig. 127

On le démontrera (n°. 282) en faiſant voir que AD : *ad* :: AC : *ac*.

Soient des points B, *b* menées les droites BA, BC, & *ba*, *bc* aux extrêmités des droites AC, *ac*; parce que les points B, *b* ſont ſuppoſés poſés ſemblablement à l'égard de AC, *ac*, les triangles ABC, *abc* ſeront ſemblables (n°. 285), d'où l'on déduit l'angle BAC = *bac* (n°. 264), & par conſéquent les triangles rectangles ADB, *adb* ſont ſemblables (n°. 271).

Ce qui donne . . . AD : *ad* :: AB : *ab*.

Mais parce que les triangles ABC, *abc* ſont ſemblables, l'on a (n°. 264) . . . AC : *ac* :: AB : *ab*.

Donc (n°. 245) . . . AD : *ad* :: AC : *ac*.

PROPOSITION I.

290. *Deux points étant placés à l'égard d'une droite donnée, comme deux autres points ſont placés à l'égard d'une autre droite auſſi donnée, ſi on y joint les deux premieres par une droite, & les deux autres auſſi par une droite, ces lignes terminées par des points ſemblablement poſés, ſeront entr'elles comme les deux droites données.*

PRÉPARATION.

On ſuppoſera d'abord, à l'égard des droites AC, *ac*, les points B, *b*, pris en-dehors, ſemblablement poſés, & les points D, *d* pris ſur ces droites, auſſi ſemblablement poſés; & on menera la droite BD entre les points B & D, & la droite *bd* entre les deux au- Fig. 127

tres points *b*, *d*, l'on aura à démontrer que . .
. . . . . BD : *bd* :: AC :

130. On ſuppoſera enſuite les points G & *g*, F & *f*, en-dehors des droites BC, *bc*, ſemblablement p à l'égard de ces droites, & l'on aura à démontr
. . . . . GF : *gf* :: BC :

Dans ces deux cas, on joindra par des droites points ſemblablement poſés avec les extrêmités des gnes données, à l'égard deſquelles ils ſont placés la même façon : par ces moyens on pourra déduire la définition des points ſemblablement poſés, les portions à démontrer.

DÉMONSTRATION.

1°. . . . . BD : *bd* :: AC :

Car les points B, *b* étant ſemblablement poſés à l'ég des droites AC, *ac*, on a (n°. 284) AB : *ab* :: AC : & l'angle BAC = *bac*.

Les points D, *d* étant auſſi ſuppoſés ſemblablem poſés à l'égard des mêmes droites AC, *ac*, on a (283) . . . . . AD : *ad* :: AC : d'où l'on conclut (n° 245) . . AB : *ab* :: AD :

Les triangles BAD, *bad* ont donc l'angle A = l gle *a*, & les côtés AB & *ab*, AD & *ad* de ces gles directement proportionnels ; & par conſéqu ces triangles ſont ſemblables (n°. 270), & l'on déduira (n°. 264) . . . . AB : *ab* :: BD :

Et comme l'on a trouvé ci-deſſus AB : *ab* :: AC : on conclurra (n°. 245) . . . BD : *bd* :: AC :

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

2°. . . . . GF : *gf* :: BC :

Car les points G, *g* étant ſemblablement poſés à gard des droites BC, *bc*, on a dans les trian BGC, *bgc* ſemblables (n°. 248) l'angle GCB = *g*

Les points F, *f*, étant ſemblablement poſés à

gard des mêmes droites BC, *bc*, on a dans les triangles BFC, *bfc* ſemblables (n°. 284) l'angle FCB = *fcb*; par conſéquent l'angle GCB — FCB = *gcb* — *fcb*, c'eſt-à-dire, l'angle GCF = *gcf*.

De plus des triangles ſemblables BGC, *bgc*, on déduit (n°. 264) . . . GC : *gc* :: BC : *bc*. *Fig.* 130

Des triangles ſemblables BFC, *bfc*, on déduit . . . . . FC : *fc* :: BC : *bc*.

Ce qui donne (n°. 245) . . . GC : *gc* :: FC : *fc*.

Ainſi, dans les triangles FCG, *fcg*, l'angle GCF = *gcf*, & les côtés de ces angles ſont directement proportionnels : ces triangles ſont donc ſemblables (n°. 270), & l'on en tirera . . GF : *gf* :: FC : *fc*.

Et comme l'on a trouvé . . FC : *fc* :: BC : *bc*, on conclurra (n°. 245) . . . GF : *gf* :: BC : *bc*.

Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

PROPOSITION II.

291. *Deux points* G, F, *étant poſés à l'égard d'une figure* ABCDE, *ou à l'égard des côtés de cette figure, comme deux autres points* g, f *ſont poſés à l'égard d'une autre figure* abcde *ſemblable à la premiere.*

Si on mene une droite GF *entre les points* G, F, *& une droite* gf *entre les points* g, f, *les côtés homologues* AB & ab, BC & bc, *&c. des deux figures ſemblables* ABCDE, abcde, *ſeront proportionnels aux droites* GF, gf. *Fig.* 13

DÉMONSTRATION.

Les points G & *g*, F & *f*, étant placés de la même façon à l'égard des côtés homologues des figures ABCDE, *abcde* ſemblables; par exemple, à l'égard des côtés BC, *bc*, on a (n°. 290) BC : *bc* :: GF : *gf*.

Mais les côtés homologues des figures ſemblables ſont proportionnels (n°. 274).

C'eſt-à-dire, que BG : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: EA : *ea*, &c.

Donc . . . . . { BC : *bc* / CD : *cd* / DE : *de* :: GF : *gf* / EA : *ea* / AB : *ab*.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

127. 292. Premiere. *Si dans les parallélogrammes ſemblables* AE, ae, *ou dans les triangles ſemblables* ABC, abc, *on abaiſſe des ſommets des angles égaux & correſpondans quelconques* B, b *les perpendiculaires* BD, bd *ſur les côtés homologues* AC, ac, *ces perpendiculaires qui repréſentent les hauteurs de ces parallélogrammes ou de ces triangles, ſeront entr'elles comme les côtés homologues de ces parallélogrammes ou de ces triangles.*

C'eſt-à-dire, que l'on aura BD:*bd*::AC:*ac*::AB:*ab*, &c.

En effet, parce que les parallélogrammes AE, *ae*; & les triangles ABC, *abc* ſont ſemblables, les ſommets des angles correſpondans B, *b* ſont des points ſemblablement poſés à l'égard des côtés oppoſés AC, *ac* (n°. 288); les points D, *d* déterminés par les perpendiculaires BD, *bd* ſont auſſi des points ſemblablement poſés ſur les côtés AC, *ac* (n°. 289). Donc les perpendiculaires BD, *bd* ſont des droites menées entre des points ſemblablement poſés à l'égard des côtés homologues AC, *ac*.

Par conſéquent (n°. 291) BD : *bd* :: AC : *ac*, ou :: AB : *ab*, &c.

129. 293. Seconde. *Dans les poligones réguliers ſemblables* ABCDEF, abcdef, *les rayons obliques* OA, oa, *ou les apothemes* OH, oh, *ſont entr'eux comme les côtés homologues quelconques* AB, ab *de ces figures.*

Car

Car les centres O & o ſont ſemblablement poſés à gard des côtés homologues AB, *ab* (n°. 287); il eſt de même des ſommets des angles correſpon- ns A, *a* (n°. 288), & des points H, *h*, milieux des tés AB, *ab* (n°. 283).

Donc les rayons obliques OA, *oa*, les apothemes *Fig.* 129. I, *oh* ſont des droites tirées entre des points pla- de la même façon à l'égard des côtés homologues lconques AB, *ab*, & par conſéquent (n°. 291) aura . . . . . $\begin{cases} OA : oa \\ OH : oh \end{cases} :: AB : ab.$

294. Troiſieme. *Dans les figures ſemblables quelcon-* *Fig.* 128. s ABCDE, abcde, *les côtés homologues ſont portionnels à deux droites quelconques* AD, ad, *ti- s entre les ſommets des angles correſpondans quel- ques* A & a, D & d.

Car les ſommets des angles correſpondans A & *a*, & *d* ſont des points ſemblablement poſés à l'égard côtés homologues des figures ABCDE, *abcde* . 288); par conſéquent les côtés homologues de figures ſeront entr'eux comme les droites AD, *ad*, es entre les ſommets A & *a*, D & *d* d'angles cor- pondans (n°. 291).

295. Quatrieme. *Dans les figures ſemblables quel- ques régulieres ou irrégulieres, les lignes homologues appelle ainſi les lignes tirées entre les points ſem- blement poſés à l'égard des côtés homologues) ſont portionnelles entr'elles.*

Car on vient de démontrer (n°. 291) que les lignes mologues ſont proportionnelles aux côtés homolo- es : or les côtés homologues ſont proportionnels r'eux (n°. 274). Donc les lignes homologues ſont ſſi proportionnelles entr'elles (n°. 245).

ARTICLE III.

apport des contours de figures ſemblables.

PROPOSITION. *Les contours de deux figures ſemblables quelconques* ABCDE, abcde, *ſont comme les côtés homologues de ces figures.*

PRÉPARATION.

s côtés homologues de deux figures ſemblables t proportionnels, il eſt vident que le rapport de contour n'eſt autre e que le rapport qui ſe ſons égales entre la ſom- s conſéquens.

DÉMONSTRATION.

Les côtés homologues des figures ſemblables ABCDE, *abcde* étant proportionnels (n°. 274), on pourra faire cette ſuite de raiſons égales . . . . . AB : *ab* :: BC : *bc* :: CD : *cd* :: DE : *de* :: EA : *ea*.

D'où l'on tirera (n°. 256) en faiſant la ſomme des antécédens & celle des conſéquens . . . . . AB + BC + CD + DE + EA : *ab* + *cd* + *de* + *ea* :: AB : *ab*.

C'eſt-à-dire, que le contour du poligone ABCDE eſt au contour du poligone ſemblable *abcde*, comme l'un quelconque AB des côtés du premier eſt au côté homologue *ab* du ſecond.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

297. Premiere. *Les contours des figures ſemblables*
130. ABCDE, abcde *ſont entr'eux comme les lignes homologues quelconques* FG & fg, AG & ag, &c. *de ces figures.*

Car les lignes homologues des figures ſemblables

ſont proportionnelles aux côtés homologues de ces figures (n°. 291) ; donc les contours des figures ſemblables étant proportionnels aux côtés homologues (n°. 296), ils ſont auſſi proportionnels aux lignes homologues (n°. 245).

298. Seconde. *Les contours des poligones réguliers ſemblables* ABCDEF, abcdef *ſont entr'eux comme les rayons obliques* OA, *&* oa, *ou comme les apothemes* OH *&* oh *de ces poligones.* Fig. 129.

Car les rayons obliques OA & *oa*, & les apothemes OH & *oh* ſont proportionnels aux côtés homologues quelconques AB & *ab* (n°. 293). Donc les contours étant entr'eux comme les côtés homologues, ils ſont auſſi entr'eux comme les rayons obliques, ou comme les apothemes (n°. 245).

299. Troiſieme. *Les circonférences des cercles ſont entr'elles comme les rayons de ces cercles.*

Car les cercles ſont des poligones réguliers ſemblables ; or les contours des poligones réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les rayons de ces poligones. Donc les contours des cercles ou leur circonférence, ſont auſſi dans le même rapport que les rayons de ces cercles.

300. Et parce que dans différens cercles les arcs de même nombre de degrés ſont des parties ſemblables des circonférences de ces cercles, & ſont par conſéquent en même rapport que ces circonférences (n°. 248) : on conclurra encore que *dans différens cercles les arcs de même nombre de degrés ſont entr'eux comme les rayons de ces cercles.*

REMARQUE.

301. De ce que les contours des figures ſemblables ſont entr'eux comme les lignes homologues de ces figures, on peut conclurre la maniere d'ajouter, ſouſ-

traire, multiplier & diviſer les contours des figures ſemblables.

1°. Deux figures ſemblables étant données, on aura conſtruit une figure ſemblable dont le contour ſoit égal à la ſomme ou à la différenee des contours des figures données, ſi une des lignes quelconques de cette figure eſt égale à la ſomme ou à la différence des deux lignes correſpondantes dans les figures ſemblables données.

2°. Une figure étant donnée, on aura conſtruit une figure ſemblable dont le contour ſoit le double ou le triple, &c. ou la moitié ou le tiers, &c. du contour de la figure donnée, ſi l'une quelconque des lignes de la figure conſtruite eſt le double ou le triple, &c. ou la moitié ou le tiers, &c. de la ligne correſpondante dans la figure donnée.

SECTION IV.

Les lignes proportionnelles conſidérées dans différentes ſortes de triangles, dans quelques poligones réguliers, & dans le cercle.

ARTICLE PREMIER.

Les lignes proportionnelles conſidérées dans différentes ſortes de triangles.

DE'FINITION.

302. UNE droite AC eſt dite coupée en *moyenne & extrême raiſon*, lorſqu'elle eſt coupée en deux parties AE, EC, enſorte que la ligne entiere AC ſoit à ſa plus grande partie AE, comme cette plus grande partie eſt à la plus petite EC.

La plus grande AE des deux parties d'une droite AC, diviſée en moyenne & extrême raiſon, ſe nomme *médiane*.

PROPOSITION I.

303. *Dans tout triangle rectangle* ABC, *ſi on abaiſſe du ſommet* B *de l'angle droit une perpendiculaire* BP *ſur l'hypothenuſe* AC, *cette perpendiculaire ſera moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens* AP, PC *de l'hypothenuſe ; & chaque côté* AB, BC *de l'angle droit ſera moyen proportionnel entre l'hypothenuſe & le ſegment adjacent à ce côté.* Fig. 131.

C'eſt-à-dire, que l'on aura $\begin{cases} \div\div AP : BP : PC \\ \div\div AP : AB : AC \\ \div\div PC : BC : AC. \end{cases}$

PRÉPARATION.

Comme les termes des proportions à démontrer ſont des côtés dans le triangle rectangle ABC donné, & dans les triangles APB, BPC, dans leſquels le triangle ABC eſt partagé par la perpendiculaire BP, on va faire voir que ces triangles ſont ſemblables, & que les termes des proportions à démontrer en ſont des côtés homologues.

DÉMONSTRATION.

Puiſque l'on ſuppoſe BP perpendiculaire ſur l'hypothenuſe AC, les triangles APB, BPC, dans leſquels la perpendiculaire BP diviſe le triangle rectangle ABC, ſont rectangles ; de plus, le triangle rectangle APB a l'angle A commun avec le triangle rectangle ABC ; ce qui donne l'angle *r* de l'un égal à l'angle R de l'autre (n°. 144) : ce triangle APB eſt donc ſemblable au triangle ABC (n°. 271).

Le triangle rectangle BPC a l'angle commun avec le triangle rectangle ABC ; ce qui donne l'angle *o* de l'un égal à l'angle O de l'autre (n°. 144) : le triangle BPC eſt donc ſemblable au triangle ABC (n°. 271).

Les triangles APB, BPC étant ſemblables chacun au triangle ABC, ſont dès-lors évidemment ſemblables entr'eux. Cela poſé,

1°. Les triangles APB, BPC étant ſemblables, leurs côtés homologues ſont proportionnels, & par conſéquent en prenant dans ces triangles les côtés oppoſés aux angles égaux *r* & R, *o* & O, on aura (n°. 264) . . . . . AP : PB : PB : PC.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

131. 2°. Les triangles APB, ABC étant ſemblables, leurs côtés homologues ſont proportionnels ; par conſéquent en prenant dans ces triangles les côtés oppoſés aux angles droits *d* & ABC, & ceux qui ſont oppoſés aux angles égaux *r* & R, on aura (n°. 264) . . . . . AP : AB :: AB : AC.

Ce qu'il falloit 2°. *démontrer.*

3°. Prenant dans les triangles ſemblables BPC, ABC, les côtés oppoſés aux angles égaux O & *o*, & ceux qui ſont oppoſés aux angles droits D & ABC, on aura (n°. 264) . . . . PC : BC :: BC : AC.

Ce qu'il falloit 3°. *démontrer.*

CONSÉQUENCES.

131. 304. Premiere. *Dans tout triangle rectangle* ABC, *ſi on fait le quarré* X *de l'hypothenuſe* AC, *les quarrés* Z & Y *des côtés* AB, BC *de l'angle droit* ABC, *le quarré fait ſur l'hypothenuſe ſera égal à la ſomme des quarrés faits ſur les deux côtés de l'angle droit ; c'eſt-à-dire, que l'on aura* $X = Z + Y$.

En effet, on vient de démontrer qu'en abaiſſant du ſommet B de l'angle droit la perpendiculaire BP ſur

l'hypothenuſe AC, on a . . . $\begin{cases} \therefore AP : AB : AC. \\ \therefore PC : BC : AC. \end{cases}$

Donc en faiſant le produit des extrêmes, & le quarré de la moyenne (n°. 253) . . . $\begin{cases} AC \times AP = \overline{AB}^2 \\ AC \times PC = \overline{BC}^2. \end{cases}$

En ajoutant enſemble les membres correſpondans de ces équations (*axiome* 4) . . . . . .

. . . $AC \times AP + AC \times PC = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$,

ou . . $AC \times \overline{AP + PC} = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Et en mettant AC à la place de AP + PC,

. . . . $AC \times AC$ ou $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Mais $\overline{AC}^2$ eſt l'expreſſion algébrique du quarré X, fait ſur l'hypothenuſe AC (n°. 205).

$\overline{AB}^2$ eſt l'expreſſion du quarré Z, fait ſur le côté AB. *Fig.* 13

$\overline{BC}^2$ eſt l'expreſſion du quarré Y, fait ſur l'autre côté BC de l'angle droit.

Donc en ſubſtituant à ces expreſſions algébriques les quarrés . . . . . X, Z, Y,

on aura . . . . . $X = Z + Y$.

305. Seconde. Comme de l'équation $X = Z + Y$, on déduit . . . . . $\begin{cases} X - Z = Y \\ X - Y = Z, \end{cases}$

on conclurra que *dans le triangle rectangle le quarré de chaque côté de l'angle droit eſt égal à la différence des quarrés, de l'hypothenuſe & de l'autre côté de l'angle droit.*

REMARQUE.

306. Dans un quarré quelconque ACMN, la diagonale NC eſt incommenſurable avec le côté de ce quarré; c'eſt-à-dire, que l'on ne peut exprimer leur *Fig.* 131

rapport par aucun nombre entier ou fractionnaire.

En effet, dans le triangle rectangle NCM, formé sur la diagonale NC par les deux côtés NM, MC du quarré, on a (n°. 304) $\overline{NC}^2 = \overline{NM}^2 + \overline{MC}^2$.

Mettant $\overline{NM}^2$ pour $\overline{MC}^2$, parce que NM = MC, (les côtés du quarré étant égaux entr'eux) . . . on a . . . . . $\overline{NC}^2 = 2\overline{NM}^2$.

Extrayant la racine quarrée de chaque membre, il vient enfin (*axiome* 11) . . . $NC = \sqrt{2\overline{NM}^2}$

ou $NC = NM \times \sqrt{2}$,

d'où l'on tire (n°. 254) . . . $NC : NM :: \sqrt{2} : 1$.

Ce qui fait connoître que la diagonale NC, & le côté NM du quarré, dont on voit le rapport égal à celui de $\sqrt{2}$ à 1, ſont incommenſurables; car le nombre 2 étant un quarré imparfait, ſa racine quarrée ne peut être exprimée par aucun nombre. Par conſéquent le rapport de $\sqrt{2}$ à 1 ne pourra auſſi être exprimé par aucun nombre.

PROPOSITION II.

132. 307. *Dans tout triangle* ABC, *qui n'eſt pas rectangle, ſi du ſommet de l'un* B *des angles on abaiſſe une perpendiculaire* BP *qui tombe ſur le côté oppoſé* AC *que l'on nommera baſe, le quarré de l'un des côtés de l'angle* B *ſera égal à la ſomme des quarrés de l'autre côté de l'angle* B *& de la baſe* AC, *moins deux rectangles de la baſe* AC *par le ſegment de cette baſe compris entre la perpendiculaire & le ſecond côté de l'angle* B.

Il faudra prouver,

par exemple, que . . $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AP$.

133. *Et dans le triangle obtuſangle* ABC, *ſi du ſommet de l'un* B *des angles aigus on mene une perpendiculaire*

BP *ſur le prolongement du côté oppoſé* AC *que l'on nommera baſe, le quarré du plus grand côté* BC *ſera égal à la ſomme des quarrés de l'autre côté* AB, *& de la baſe* AC, *plus à deux rectangles de cette baſe par ſon prolongement* AP *juſqu'à la perpendiculaire* BP.

C'eſt-à-dire, qu'il faudra démontrer que l'on a

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times AP.$$

PRÉPARATION.

Comme dans les deux parties de la propoſition on ſuppoſe BP perpendiculaire, il eſt évident qu'on pourra d'abord prendre la valeur de $\overline{BC}^2$ dans le triangle rectangle BPC; on pourra enſuite, par le moyen de l'autre triangle rectangle BAP, & de ce que l'on a démontré (n°. 210) touchant la valeur du quarré de la ſomme ou de la différence de deux lignes, changer la premiere valeur de $\overline{BC}^2$ en une autre qui ſoit relative aux côtés du triangle ABC.

DÉMONSTRATION de la premiere Partie.

La ligne BP étant ſuppoſée perpendiculaire, le triangle BPC eſt rectangle, & l'on a (n°. 304) *Fig.* 132.

$$\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2.$$

Le triangle BPA eſt auſſi reſtangle, & l'on a

$$\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2.$$

Le ſegment PC étant la différence de la baſe AC & de ſon autre ſegment AP, on a (n°. 210)

$$\overline{CP}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 - 2AC \times AP.$$

Donc ſi dans l'expreſſion $\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$, on ſubſtitue les valeurs de $\overline{BP}^2$, $\overline{CP}^2$, que l'on vient de trouver, on aura $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AP$.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

DE'MONSTRATION de la ſeconde Partie.

La droite BP étant ſuppoſée perpendiculaire,
g. 133. triangle BPC eſt rectangle, & l'on a (n°. 304
. . . . . $\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PC}$
Le triangle BPA eſt auſſi rectangle, & l'on a .
. . . . . $\overline{BP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{A}$
Le côté PC étant la ſomme de la baſe AC & ſon prolongement AP, on a (n°. 210) . .
. . . . . $\overline{PC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AP}^2 + 2AC \times A$
Donc ſi dans l'expreſſion $\overline{BC}^2 = \overline{BP}^2 + \overline{PC}^2$, ſubſtitue les valeurs de $\overline{BP}^2$, $\overline{PC}^2$ que l'on vient trouver, on aura $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + 2AC \times A$
Ce qu'il falloit 2°. démontrer.

PROPOSITION III.

g. 134. 308. *Si l'on diviſe en deux également l'un quelco que* B *des angles d'un triangle quelconque* ABC, *p une droite* BD *qui coupe le côté oppoſé* AC, *les ſe mens* AD, DC *de ce côté ſeront proportionnels aux tés* AB, BC *de l'angle* B *que l'on aura diviſé.*

C'eſt-à-dire, que l'on aura AD : DC :: AB : B

g. 135. *Et dans un triangle iſoſcele* ABC, *dont chaque an* A, C *ſur la baſe* AC, *ſoit double de l'angle* B *du ſo met, ſi l'on diviſe en deux également l'un* C *des ang ſur la baſe, par une droite* CP *qui coupe le côté oppo* AB, *ce côté oppoſé* AB *ſera coupé au point* P *en moy ne & extrême raiſon, & la baſe* AC *ſera égale à la n diane de ce côté.*

C'eſt-à-dire, que l'on aura $\begin{cases} 1°.\ AB : BP :: BP : A \\ 2°.\ AC = BP. \end{cases}$

PRÉPARATION.

Pour peu que l'on réfléchiſſe aux conditions de la remiere partie de cette propoſition, on conçoit aiſément que cette premiere partie n'eſt qu'une application de ce que l'on a dit (n°. 267) touchant les côtés 'un triangle coupés parallélement à la baſe.

Quant à la ſeconde partie de la propoſition, les onditions qu'elle renferme permettent qu'on la traite omme une conſéquence de la premiere.

DÉMONSTRATION.

Soit prolongé le côté BC du triangle ABC d'une *Fig.* 134
uantité BE égale à l'autre côté AB, & ſoit menée la roite AE.

Il réſulte de cette conſtruction un triangle ABE ſoſcele ſur AE, dans lequel par conſéquent (n°. 147) 'angle E = EAB; & comme la ſomme de ces deux ngles eſt égale (n°. 141) à l'extérieur ABC, il eſt viible que l'angle E eſt égal à l'angle DBC qui, par la uppoſition, eſt la moitié de l'angle ABC. Or à cauſe le ces angles égaux E & DBC, la droite BD ſera ans le triangle ACE parallele à la baſe AE (n°. 64). Par conſéquent (n°. 267) on aura AD : DC :: BE : BC. Mettant dans cette proportion AB à la place de BE, ui lui eſt égal par la conſtruction, on aura . . .

. . . . . AD : DC :: AB : BC.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

DE'MONSTRATION de la ſeconde Partie.

Parce que l'on ſuppoſe dans le triangle iſoſcele *Fig.* 135
ABC, l'angle ACB diviſé en deux également par la droite CP, on vient de trouver que l'on a . . .

. . . . . BC : AC :: BP : AP.

Mais parce que le triangle ABC eſt iſoſcele ſur AC, l'on a (n°. 16) . . . AB = BC.

Parce que dans ce même triangle ABC, l'angle ACB ſur la baſe AC eſt double de l'angle B du ſommet, & que cet angle ACB eſt diviſé en deux également par la droite PC, ce qui donne l'angle ACP & l'angle PCB égaux chacun à l'angle B, on a le triangle CPB iſoſcele ſur BC; c'eſt-à-dire, que PC = PB.

On a de plus le triangle ACP évidemment ſemblable (n°. 271) au triangle ACB à cauſe de l'angle A commun, & de l'angle ACP = ABC; par conſéquent le triangle ABC étant iſoſcele ſur AC, ACP ſera iſoſcele ſur AP, d'où l'on déduit AC = CP, & comme l'on a trouvé CP = PB, on conclurra AC = PB.

Mettant donc dans la proportion ci-deſſus, au lieu des deux premiers termes BC, AC, leurs égaux AB, BP, on aura . . . AB : BP :: BP : AP.

C'eſt-à-dire, que le côté AB eſt diviſé en moyenne & extrême raiſon.

L'égalité AC = PB montre d'ailleurs que la baſe AC eſt égale à la médiane PB, & c'eſt ce qu'il falloit 2°. démontrer.

ARTICLE II.

Les lignes proportionnelles conſidérées dans quelques polygones réguliers.

PROPOSITION I.

309. *Le côté* AB *du décagone régulier inſcrit dans* g. 136. *un cercle* X, *eſt la médiane du rayon* OA *de ce cercle diviſé en moyenne & extrême raiſon.*

PRÉPARATION.

En faiſant le calcul de l'angle au centre & de l'angle à la baſe dans le décagone régulier, on voit aiſé-

ment que cette propoſition n'eſt qu'une application de la ſeconde partie de la précédente (n°. 308). Fig. 136

DÉMONSTRATION.

Menant aux extrêmités A, B du côté AB du décagone deux rayons OA, OB.

Il réſulte un triangle iſoſcele AOB, dans lequel l'angle AOB au centre vaut la dixieme partie de la circonférence, ou 36 d. & chaque angle A, B ſur la baſe AB vaut 72 d. (n°. 177).

Ainſi dans ce triangle iſoſcele AOB, chaque angle ſur la baſe AB eſt double de l'angle O au ſommet; par conſéquent (n°. 308) la baſe AB ou le côté du décagone régulier eſt la médiane du rayon OA diviſé en moyenne & extrême raiſon.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

310. *Ayant pris dans le cercle* X *les cordes* BA, BC *la premiere de* 72 d. *pour repréſenter le côté du pentagone régulier inſcrit dans le cercle, la ſeconde de* 36 d. *pour repréſenter le côté du décagone régulier inſcriptible dans le même cercle, ſi on diviſe par une droite* Od *l'angle* AOB *au centre du pentagone régulier en deux parties* BOd, dOA *qui ſoient entr'elles comme* 1 *eſt à* 3, *cette droite* Od *diviſera le côté* AB *du pentagone en deux ſegmens* Bh, hA, *de maniere que,* Fig. 137.

1°. *Le côté* BC *du décagone régulier inſcriptible au cercle* X, *ſera moyen proportionnel entre le côté* AB *du pentagone & ſon petit ſegment* Bh.

C'eſt-à-dire, que l'on aura AB : BC :: BC : Bh.

2°. *Le rayon* AO, *ou le côté de l'exagone régulier inſcriptible dans le même cercle* X, *ſera moyen proportionnel entre le côté* AB *du pentagone & ſon grand ſegment* hA; c'eſt-à-dire, que l'on aura AB : AO :: AO : hA.

PRÉPARATION.

fig. 137. En examinant les conditions de cette propoſition, on verra qu'on en peut déduire une conſtruction de laquelle il réſultera des triangles ſemblables qui auront pour côtés homologues les termes des proportions à démontrer.

DÉMONSTRATION.

L'angle AOB au centre du pentagone régulier renferme un arc BCA qui eſt la cinquieme partie de la circonférence, ou de 72 degrés; ainſi puiſque cet angle eſt diviſé par la droite O*d* en deux parties qui ſont entr'elles comme 1 eſt à 3, l'angle B O *d* ou l'arc B *d* eſt de 18 degrés, & l'angle *d* OA ou l'arc *d* A eſt de 54 degrés: d'où il ſuit que,

1°. La droite O*d* diviſe en deux également l'arc B*d*C ſoutenu par le côté du décagone, ce rayon O*d* eſt donc perpendiculaire ſur le côté BC du décagone (n°. 118); & par conſéquent (n°. 83) ſi du point *h* où il rencontre le côté AB du pentagone, on mene la droite *h*C, on aura *h*C = *h*B, & le triangle B*h*C ſera iſoſcele ſur BC.

En menant du point C au point A un ſecond côté du décagone régulier, on aura encore un triangle BCA iſoſcele ſur le côté AB du pentagone.

Mais ces triangles B*h*C, BCA iſoſceles, ſont ſemblables, parce qu'ils ont un angle égal placé de la même façon; à ſavoir, *h*BC = CBA (n°. 272).

Donc, en faiſant la proportion des côtés homologues (n°. 264) . . . . . AB : BC :: BC : B*h*.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

2°. Dans le triangle A*h*O, l'angle *h*OA étant de 54 degrés par la ſuppoſition, & l'angle OA*h* étant auſſi de 54 degrés comme angle à la baſe dans le pen-

agone régulier (n°. 177), le triangle AhO eſt viſiblement iſoſcele ſur le rayon AO.

Le triangle AOB formé par deux rayons obliques, & le côté AB du pentagone, eſt encore évidemment iſoſcele ſur le côté AB du pentagone. *Fig.* 137.

Mais ces deux triangles iſoſceles AhO, AOB, ſont encore ſemblables, parce qu'ils ont l'angle OAh commun, & placé de la même façon (n°. 272).

Donc, (en faiſant la proportion des côtés homologues) . . . . . AB : AO :: AO : hA.

Ce qu'il falloit 2°. *démontrer.*

CONSÉQUENCE.

311. *Le quarré du côté* AB *du pentagone régulier, inſcrit dans un cercle* X, *eſt égal à la ſomme des quarrés du côté* BC *du décagone, & de* OA *côté de l'exagone, réguliers inſcriptibles dans le même cercle* X. *Fig.* 137.

C'eſt-à-dire, que . . . $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{OA}^2$.

Car l'on vient de trouver (n°. 310) $\begin{cases} AB : BC :: BC : B\hbar \\ AB : OA :: OA : \hbar A. \end{cases}$

Donc, en faiſant le produit des extrêmes & le quarré de la moyenne (n°. 253) $\begin{cases} AB \times B\hbar = \overline{BC}^2 \\ AB \times \hbar A = \overline{OA}^2. \end{cases}$

En ajoutant enſemble les membres correſpondans de ces équations $AB \times B\hbar + AB \times \hbar A = \overline{BC}^2 + \overline{OA}^2$,

ou $AB \times \overline{B\hbar + \hbar A} = \overline{BC}^2 + \overline{OA}^2$.

Mais $AB \times \overline{B\hbar + \hbar A} = AB \times AB = \overline{AB}^2$.

Donc . . . . . $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{OA}^2$.

ARTICLE III.

Les lignes proportionnelles conſidérées dans le cercle.

DÉFINITIONS.

fig. 138. 312. Une perpendiculaire MP élevée ſur un diametre AB du cercle, & terminée à la circonférence, ſe nomme *ordonnée* du cercle ; & l'on nomme abſciſſes les parties AM, MB, dans leſquelles le diametre AB eſt coupé par l'ordonnée.

313. Deux droites ſont dites *réciproques* à deux autres lorſque les premieres ſont les extrêmes, & les deux autres ſont les moyens d'une même proportion géométrique.

PROPOSITION I.

fig. 138. 314. *Si d'un même point* P, *pris ſur la circonférence d'un cercle* X, *on mene des cordes* PA, PB *aux extrêmités d'un diametre quelconque* AB, *& une ordonnée* PM *à ce diametre, cette ordonnée* PM *ſera moyenne proportionnelle entre les abſciſſes* AM, MB, *& chaque corde ſera moyenne proportionnelle entre le diametre* AB *& l'abſciſſe correſpondante.*

C'eſt-à dire, que l'on aura $\begin{cases} AM : PM :: PM : MB \\ AM : AP :: AP : AB \\ MB : PB :: PB : AB. \end{cases}$

PRÉPARATION.

Les cordes PA, PB étant ſuppoſées menées du même point P de la circonférence aux extrêmités A, B du diametre AB, l'angle APB qu'elles forment eſt un angle à la circonférence appuyée ſur le diametre, & par conſéquent (n°. 131) un angle droit.

Après cette réflexion on conçoit aiſément que la propoſition

roposition dont il s'agit n'eſt qu'une application des ropriétés du triangle rectangle, lorſqu'on le ſuppoſe oupé par une perpendiculaire abaiſſée du ſommet de angle droit ſur l'hypothénuſe.

DE'MONSTRATION.

L'angle APB étant droit, le triangle APB eſt un iangle rectangle qui a pour hypothénuſe le diametre B, pour côtés de l'angle droit les cordes PA, PB. 'ordonnée PM ſera la perpendiculaire abaiſſée du ommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe, & les abſiſſes AM, MB ſeront les ſegmens de l'hypothénuſe.

Or, dans le triangle rectangle, la perpendiculaire baiſſée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe ſt moyenne proportionnelle entre les ſegmens de l'hyothénuſe, & chaque côté de l'angle droit eſt moyen roportionnel entre l'hypothénuſe entiere & le ſegnent qui lui eſt adjacent (n°. 303).

Donc, de même l'ordonnée MP eſt moyenne pro- *Fig.* 138.
ortionnelle entre les abſciſſes AM, MB.

La corde AP eſt moyenne proportionnelle entre le iametre AB & l'abſciſſe correſpondante AM.

La corde BP eſt moyenne proportionnelle entre le iametre AB & l'abſciſſe correſpondante MB.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

315. *Le quarré de l'ordonnée du cercle eſt égal au quarré du rayon, moins le quarré de la diſtance de l'ordonnée au centre.* *Fig.* 138.

C'eſt-à-dire, que dans le cercle X on a . . . .

. . . . . $\overline{MP}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{MO}^2$.

Car on vient de trouver (n°. 314) AM:MP :: MP : MB.

Par conſéquent (n°. 253) $\overline{MP}^2 = AM \times MB$.

Mais le diametre AB étant diviſé en deux é
ment au centre O, & en deux inégalement en
on a (n°. 211) . . $AM \times MB = \overline{AO}^2 - \overline{M}$
Donc . . . . $\overline{MP}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{M}$

REMARQUE.

p. 138. 316. En nommant y l'ordonnée quelconque du
cle, x ſa diſtance au centre du cercle, a le ra
on déduit du numéro précédent l'équation algéb
$y^2 = a^2 - x^2$, que l'on nomme équation du cer
parce qu'elle exprime la loi ou le rapport conſtan
ſe trouve entre chaque ordonnée du cercle & les
ciſſes correſpondantes.

PROPOSITION II.

139. 317. *Deux cordes* AB, DC *qui ſe coupent da
cercle, ſe coupent en parties réciproques.*
C'eſt-à-dire, que l'on a AO : OC :: OD : (
Et par conſéquent (n°. 252) $AO \times OB = OC \times$ (

PRÉPARATION.

139. Puiſqu'il eſt queſtion de deux cordes AB, DC
ſe coupent dans le cercle, il eſt évident qu'en
gnant les extrêmités A & C, B & D de ces co
par des droites AC, BD, il réſultera des triar
AOC, BOD, dont la ſimilitude qui ſe déduira
conditions de la propoſition, donnera la proporti
démontrer.

DÉMONSTRATION.

Dans les triangles AOC, DOB, les angles A &
étant à la circonférence, & appuyés ſur le même
BC ſont égaux (n°. 129) : par la même raiſon

ngles C & B ſont égaux : ces triangles AOC, DOB ont donc ſemblables (n°. 271).

Donc en faiſant la proportion des côtés oppoſés aux angles égaux, on aura AO : OC :: OD : OB.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

318. *Si d'un même point* B, *pris en-dehors d'un cercle* X, *on mene deux ſécantes* BA, BC, *ces ſécantes & leurs parties extérieures* BF, BE, *ſont réciproquement proportionnelles.* Fig. 14.

C'eſt-à-dire, que l'on a (n°. 313) BA : BC :: BE : BF.

Et par conſéquent (n°. 252) BA × BF = BC × BE.

PRÉPARATION.

On joindra par les droites FC, AE, les points F & C, A & E, auxquels les ſécantes BA, BC coupent la circonférence : il réſultera de cette conſtruction deux triangles ABE, CBF qui ſont ſemblables dans les conditions de la propoſition, & dont la ſimilitude donne la proportion à démontrer.

DÉMONSTRATION.

Dans les triangles ABE, CBF, l'angle B eſt commun, les angles BAE & BCF étant à la circonférence, & embraſſans le même arc FE, ſont encore égaux (n°. 129). Donc les triangles ABE, CBF ſont ſemblables (n°. 271).

Et en faiſant la proportion des côtés oppoſés aux angles égaux, on aura . . AB : BC :: BE : BF.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

319. *Si d'un même point* B, *pris en-dehors d'un cer-* Fig. 1.

cle X, *on mene une ſécante* BC *& une tangente* BD *à ce cercle, la tangente* BD *ſera moyenne proportionnelle entre la ſécante* BC *& ſa partie extérieure* BE.

C'eſt-à-dire, que l'on aura BC : BD :: BD : BE.

Et par conſéquent (n°. 253) $\overline{BD}^2 = BC \times BE$.

PRÉPARATION.

On pourroit regarder cette propoſition comme une conſéquence de la précédente touchant les ſécantes; car en ſuppoſant une ſécante B*d* qui entre infiniment peu dans le cercle, ou qui retranche un arc *fd* infiniment petit, la partie extérieure B*f* ne differe pas de la ſécante entiere B*d*; alors dans la proportion (n°. 318). . . . BA : B*d* :: B*f* : BF.

Mettant B*d* à la place de B*f*, on aura BA : B*d* :: B*d* : BF.

C'eſt-à-dire, qu'une ſécante B*d* qui entre infiniment peu dans le cercle, eſt moyenne proportionnelle entre une autre ſécante quelconque BA menée du même point B, & la partie extérieure BF de cette autre ſécante : or une ſécante qui entre infiniment peu dans le cercle, eſt une tangente. Donc la tangente eſt moyenne proportionnelle entre la ſécante menée du même point que cette tangente, & la partie extérieure de cette ſécante.

Fig. 140. Cette propoſition peut auſſi ſe prouver directement en joignant par des droites DE, DC le point d'attouchement D de la tangente BD avec les points E, C, auxquels la ſécante BC coupe la circonférence.

DÉMONSTRATION.

Dans les triangles CBD, DBE, l'angle B eſt commun; l'angle BCD dans le ſegment eſt égal à l'angle BDE de l'autre ſegment (n°. 133). Donc ces triangles CBD, DBE ſont ſemblables (n°. 271).

Donc, en prenant les côtés opposés aux angles égaux, on aura . . . BC : BD :: BD : BE.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

320. Premiere. *Deux tangentes* BG, BD, *menées au cercle d'un même point extérieur* B, *sont égales.* Fig. 140.

Car en menant du même point B la sécante BC coupée au point E à la rencontre de la circonférence, on a (n°. 319) . . . . . $\begin{cases} \overline{BG}^2 = BC \times BE \\ \overline{BD}^2 = BC \times BE. \end{cases}$

D'où l'on tire (*axiome* 9 & 11) $\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2$ & BG=BD.

321. Seconde. *Etant menée une sécante* AB, *& une tangente* AC *à un cercle* X *d'un même point* A, *pris en-dehors de ce cercle, si la partie* BD *de la sécante qui est comprise dans le cercle est égale à la tangente* AC. Fig. 141.

1°. Cette partie BD sera la médiane de la sécante divisée en moyenne & extrême raison, ensorte que l'on aura . . . . . AB : BD :: BD : AD.

En effet, on a (n°. 319) AB : AC :: AC : AD.

Donc puisque BD=AC, AB : BD :: BD : AD.

2°. La partie extérieure AD de la sécante, sera la médiane de la tangente AC divisée en moyenne & extrême raison; ensorte que si l'on porte cette partie extérieure AD sur la tangente de A en E, on aura . . . . . AC : AE :: AE : EC.

Car on vient de trouver AB : BD :: BD : AD.

Donc en soustrayant (n°. 255) . . . . . AB — BD : BD :: BD — AD : AD.

Mais $\begin{cases} AB - BD = AD = AE \text{ (construction)} \\ BD = AC \text{ (supposition)} \\ BD - AD = AC - AE = EC \\ AD = AE. \end{cases}$

Par conſéquent, en mettant dans la derniere proportion à la place des termes AB — BD, BD, BI — AD, AD, leurs valeurs AE, AC, EC, AE, o aura . . . . . AE : AC : EC : AI

D'où l'on tire, en mettant chaque antécédent à place de ſon conſéquent (n°. 255) AC : AE :: AE : EC

SECTION V.

Propriétés du cercle, relatives à la Trigonométrie.

ARTICLE I.

DÉFINITIONS.

321. LE *rayon* d'un angle eſt la droite avec laquel on a décrit l'arc qui meſure cet angle.

323. *Le ſinus* ou *ſinus droit* d'un angle eſt la mo tié de la corde qui ſoutient un arc double de celui q meſure cet angle; & ſon *ſinus verſe* eſt la partie rayon compris entre le ſinus & l'arc.

324. *La tangente* d'un angle eſt la perpendiculai élevée à l'extrêmité du rayon de cet angle, & term née à la rencontre de l'autre côté; ce ſecond côté la rencontre duquel la tangente ſe termine, eſt di la *ſécante* de l'angle.

ig. 124. Etant donné, par exemple, l'angle AOT, ſi ſon ſommet O comme centre, & de l'intervalle l'un AO de ſes côtés, on décrit une circonféren & qu'ayant pris l'arc SAD double de l'arc AS qui m ſure l'angle AOT, on mene la corde SCD, qui ſe (n°. 118) coupée en deux également par le ray OA, qu'on éleve enſuite à l'extrêmité A ſur le ray AO une perpendiculaire AT terminée à la rencon de l'autre côté OT de l'angle,

l'arc { AO rayon, SC ſinus, AC ſinus verſe, AT tangente, OT ſécante } de l'angle AOT.

325. Que ſi dans la même figure ayant élevé au point O une perpendiculaire OF ſur le rayon OA (c'eſt-à-dire (n°. 11 l'angle FOP, complément de l'angle AOT, on prend l'arc SFH double de la meſure de l'angle FOP; que l'on mene la corde SGH; que l'on éleve enſuite au point F ſur FO la perpendiculaire EP, terminée à la rencontre de l'autre côté PO, *Fig.* 1

on aura { SG ſinus, GF ſinus verſe, FP tangente, OP ſécante } de l'angle FOP, ou du complément de l'angle AOT.

326. Pour abréger, on eſt convenu, *Fig.* 1.

pour abréger... { SG ſinus, GE ſinus verſe, FP co-tangente, OP co-ſécante } de l'angle AOT qui eſt alors conſidéré comme l'angle principal.

l'arc { le rayon, le ſinus de l'angle AOT, le ſinus verſe de l'angle AOT, la tangente de l'angle AOT, la ſécante de l'angle AOT, le coſinus de l'angle AOT, le coſinus verſe de l'angle AOT, la co-tangente de l'arc AOT } par { R., S. AOT., S. v. AOT., T. AOT., Sec. AOT., Cos. AOT., Cos. v. AOT., Cot. AOT. }

CONSEQUENCES.

De ce que le ſinus SC d'un angle quelconque AOT eſt la moitié d'une corde SCD qui ſoutient un arc SD double de la meſure de cet angle, on déduira, 1°. *Que le ſinus* SC *de l'angle* AOT *eſt une perpendiculaire menée de l'une* S *des extrémités de l'arc* *Fig.* 1.

O

SA, *qui meſure cet angle, ſur le côté* OA *qui va à l'autre extrêmité du même arc.*

En effet on ſait (n°. 118) que le rayon OA coupant en deux également l'arc SAD, coupe non-ſeulement la corde SD de cet arc en deux également, mais qu'il eſt auſſi perpendiculaire à cette corde ; ainſi réciproquement cette corde SD ou ſa moitié le ſinus SC, ſera perpendiculaire ſur le rayon OA.

Fig. 143. 328, n. 1. 2°. *La moitié de chaque côté d'un triangle* ABC *eſt le ſinus de l'angle qui lui eſt oppoſé.*

En effet, que l'on faſſe paſſer une circonférence par les ſommets des angles du triangle ABC, chaque angle tel que B, n'a alors que la moitié de l'arc ADC qu'il comprend entre ſes côtés ; le côté oppoſé AC qui ſoutient l'arc ADC, eſt donc une corde qui ſoutient un arc double de la meſure de l'angle B, la moitié de ce côté eſt donc le ſinus de l'angle B, par la définition du ſinus : par la même raiſon, le ſinus de l'angle C eſt la moitié du côté oppoſé AB, & le ſinus de l'angle A eſt la moitié du côté oppoſé BC.

Fig. 143. *Que ſi dans le triangle inſcrit* ABC, *l'angle* B *étoit droit, l'hypothénuſe* AC *ſeroit un diametre* (n°. 131), *& ſa moitié ou le rayon ſeroit, comme on vient de le voir, le ſinus de l'angle droit oppoſé, de même que la moitié de chaque côté de l'angle droit ſeroit le ſinus de l'angle aigu oppoſé.*

Fig. 144. 328, n. 2. Que ſi dans le triangle rectangle quelconque ABC, on prend l'hypothénuſe AC pour le rayon de chaque angle aigu A ou C qui lui eſt adjacent, le côté BC oppoſé à l'angle aigu A ſera le ſinus de cet angle A ; & le côté AB ſera le ſinus de l'angle aigu B qui lui eſt oppoſé : ce qui eſt évident par le numéro 327.

Et comme les angles aigus A, C ſont complémens l'un de l'autre, on conclurra que *dans tout triangle rec-*

angle le ſinus d'un angle aigu étant repréſenté par le côté oppoſé à cet angle, le coſinus du même angle ſera repréſenté par l'autre côté de l'angle droit.

329. 3°. *L'angle obtus quelconque* SOE, *a le même ſinus que l'angle aigu* AOS *ſon ſupplément.* Fig. 141

Car que l'on décrive du ſommet O comme centre, & de l'intervalle OA une circonférence AFEK; & que du point S auquel le côté OS coupe cette circonférence, on mene une corde SCD perpendiculaire au diametre AOE, cette corde ſoutiendra deux arcs SAD, SED qui ſeront coupés chacun également en deux par le diametre AOE (n°. 118): la même corde SCD ſoutiendra donc en même tems l'arc SED double de l'arc EFS, qui meſure l'angle obtus SOE, & l'arc SAD double de la meſure de l'angle aigu SOA, ſupplément de l'angle obtus SOE; la moitié SC de cette corde ſera donc (par la définition du ſinus) le ſinus de l'obtus SOE, & de l'aigu SOA ſon ſupplément.

Par conſéquent, *il ne ſuffira pas, pour connoître la valeur d'un angle, d'avoir ſon ſinus* SC, il faudra encore ſavoir ſi cet angle eſt obtus comme SOE, ou aigu comme SOA.

330. 4°. *Le ſinus de l'angle droit* FOA *eſt le rayon* OF *ou* OA. Fig. 142

Car l'arc double de la meſure de l'angle droit eſt la demi-circonférence. La corde qui ſoutient cet arc double eſt le diametre (n°. 46) dont la moitié eſt le rayon. Donc le rayon eſt (par la définition du ſinus) le ſinus de l'angle droit.

331. 5°. Comme le diametre FK eſt plus grand qu'une autre corde quelconque SD qui ſoutient un arc plus petit ou plus grand que la demi-circonférence, & que par conſéquent la moitié du diametre (ou le rayon) eſt plus grande que la moitié de la corde

quelconque SD, il eſt évident que *le ſinus de l'angle droit, qui eſt le rayon, eſt plus grand que le ſinus d'un angle quelconque ou obtus* SOE, *ou aigu* SOA, *lequel ſinus eſt repréſenté par la moitié de la corde* SD *qui ſoutient les arcs* SAD, *ou* SED, *doubles de ceux qui meſurent ces angles.*

332. 6°. Comme en ſuppoſant que le côté SO de l'angle aigu SOA, & de l'obtus SOE, s'approche de la perpendiculaire OF, la corde SD qui ſoutient les arcs SAD, SED doubles des meſures de ces angles, augmente évidemment (104), & par conſéquent auſſi ſa moitié SC, qui eſt le ſinus de ces angles, il ſuit :

Que les ſinus des angles aigus & obtus augmentent lorſque les angles de la premiere eſpece augmentent, & que ceux de la ſeconde diminuent.

ARTICLE II.

Propriétés pour ſervir au calcul des ſinus.

PROPOSITION I.

333. ***Le ſinus de l'angle de 30 degrés eſt égal à la moitié du rayon.***

DÉMONSTRATION.

Le ſinus de l'angle de 30 degrés eſt la moitié de la corde qui ſoutient 60 degrés (définition du ſinus); mais la corde de 60 degrés eſt le rayon (n°. 155).

Donc, &c.

PROPOSITION II.

334. ***Le coſinus d'un angle eſt égal à la racine quarrée de la différence des quarrés du rayon & du ſinus de cet angle.***

Et le ſinus verſe d'un angle eſt la différence du rayon & du coſinus de cet angle.

Ce que l'on peut exprimer généralement ainſi $\begin{cases} 1°.\ \text{Cof. } b = \sqrt{R^2 - S^2.b.} \\ 2°.\ \text{S. v. } b = R - \text{Cof. } b, \end{cases}$ en nommant b un angle quelconque.

DÉMONSTRATION.

Prenant à volonté l'angle SOA, ſoient menés ſon ſinus SC & ſon coſinus SG (n°. 327), perpendiculaires le premier à OA, le ſecond à OF. *Fig. 142.*

1°. On a (n°. 305) . . $OC = \sqrt{\overline{OS}^2 - \overline{SC}^2}$.

Mais SG eſt évidemment égal à OC (n°. 95).

Donc . . . . $SG = \sqrt{\overline{OS}^2 - \overline{SC}^2}$.

Ce qui montre que le coſinus SG de l'angle quelconque SOA eſt égal à la racine quarrée de la différence des quarrés du rayon OS, & du ſinus SC de cet angle.

2°. On a évidemment . . $AC = OA - OC$.

L'on a encore (n°. 95) $OC = SG$.

Donc . . . . . $AC = OA - SG$.

Ce qui montre que le ſinus verſe AC de l'angle quelconque SOA eſt la différence du rayon OS & du coſinus SG de cet angle.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

335. *Le ſinus d'un angle aigu quelconque eſt la moitié de la racine quarrée de la ſomme des quarrés du ſinus, & du ſinus verſe de l'angle double.*

On dira auſſi qu'il eſt quatrieme proportionnel au rayon, au coſinus & au double du ſinus de l'angle ſon double.

C'eſt-à-dire en général, qu'en nommant b l'angle

145. aigu quelconque $\begin{cases} 1°.\ S.\,b = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{S.}^2\,2b + \overline{S.v.}^2\,2b}. \\ 2°.\ S.\,b = \frac{\text{Cof.}\,\frac{1}{2}b \times 2\,S.\,\frac{1}{2}b}{R}. \end{cases}$

DE'MONSTRATION.

Ayant pris à volonté l'angle ACB, & l'angle ACD double de l'angle ACB, ſoit menée la corde AD de l'arc double ABD, & le ſinus DF du même angle.

1°. Si on cherche la valeur du ſinus AE de l'angle ACB, moitié de l'angle ACD, on conſidérera que $AE = \frac{AD}{2}$; & comme à cauſe du triangle rectangle ADF, l'on a (n°. 304) $AD = \sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{AF}^2}$, on conclurra . . . . . $AE = \frac{1}{2}\sqrt{\overline{DF}^2 + \overline{AF}^2}$.

Ce qui montre que le ſinus AE de l'angle ACB eſt égal à la moitié de la racine quarrée de la ſomme des quarrés du ſinus DF, & du ſinus verſe AF de l'angle double ACD.

2°. Si on cherche la valeur du ſinus DF de l'angle ACD double de l'angle ACB, on conſidérera que les triangles DFA, CEA ſemblables (n°. 271), donnent . . . . . AC : CE :: AD : DF.

C'eſt-à-dire, que le ſinus DF de l'angle ACD eſt la quatrieme proportionnelle au rayon AC, au coſinus CE (328 n. 2.) de l'angle ſous-double ACB, & au double AD du ſinus EA de ce même angle ſous-double.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION IV.

146, n°. 1. 336. *Le* $\begin{cases} \text{ſomme} \\ \text{différence} \end{cases}$ BCD+BCA / BCD−BCA *de deux angles ſinus de la* $\begin{cases} \text{ſomme} \\ \text{différence} \end{cases}$ *eſt égal à la ſomme & à la différence des produits faits*

du ſinus de chaque angle BCD, BCA, *multiplié par le coſinus de l'autre, diviſée par le rayon.*

C'eſt-à-dire, que . . . . . .

$$S.\overline{BCD \pm BCA} = \frac{S.BCD \times Cof.BCA \pm S.BCA \times Cof.BCD}{R}$$

DÉMONSTRATION.

Ayant mené les perpendiculaires BF, DE, DG, pour repréſenter les ſinus des angles ACB, BCD, ACD; ce qui donnera CF = Coſ. ACB, & CE = Coſ. BCD (328. n. 2).

Ayant auſſi mené du point E la perpendiculaire EQ au rayon AC, & la perpendiculaire EP au ſinus DG *fig.* 146, ou ſur ſon prolongement F, *fig.* 147, n. 1. on conſidérera qu'à cauſe des triangles ſemblables (n°. 267) CBF, CEQ, l'on a CB : CE :: BF : EQ = PG.

D'où l'on tire . . . $EQ = \frac{CE \times BF}{CB}$ ou PG

A cauſe des triangles ſemblables DPE, CBF . . . CB : CF :: DE : DP.

D'où l'on tire . . . . $DP = \frac{CF \times DE}{CB}$

Donc $DG = DP \pm PG = \frac{CF \times DE \pm CE \times BF}{BC}$

C'eſt-à-dire, en ſubſtituant les expreſſions générales de ſinus & de coſinus . . . . . .

$$S.\overline{BCD \pm BCA} = \frac{S.BCD \times Cof.BCA \pm S.BCA \times Cof.BCD}{R}$$

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

337. *Si au ſinus d'un angle moindre que* 30 *degrés, on ajoute le produit du radical* $\sqrt{3}$ *par le ſinus de la différence de cet angle à celui de* 30 *degrés, la ſomme* *Fig.* 14 n°. 2.

ſera le ſinus de l'angle qui ſurpaſſera autant l'ang
30 degrés que le premier angle en eſt ſurpaſſé.

C'eſt-à-dire, qu'en prenant dans l'angle droit A
l'angle ACB de 30 degrés, l'angle ACD moi
que l'angle ABD de l'angle DCB; en faiſant
BE = l'arc BD, pour avoir l'angle ECA qui
paſſe autant l'angle ACB de 30 degrés, que l'a
ACD en eſt ſurpaſſé; menant enfin les ſinus I
DG, il faudra prouver que EH = DL + DG ×

DÉMONSTRATION.

147, Soit menée du point D la perpendiculaire D
CF & à EH.

A cauſe des triangles rectangles ſemblables E
SQP, SCH, on a l'angle SEG = SQP = SCH =
degrés, puiſque l'on a ſuppoſé l'angle ACB de 3
grés; ainſi dans le triangle rectangle EPD, l'hy
ténuſe ED, & le côté PD étant entr'eux comm
rayon & le ſinus de l'angle PED, cette hypothé
& ce côté PD ſeront entr'eux comme le rayon
ſinus de 30 degrés; & parce que le ſinus de 30
grés eſt la moitié du rayon, on aura $PD = \frac{ED}{2} = 1$
ce qui donne $\overline{ED}^2 = 4\overline{PD}^2$.

Et comme $\overline{EP}^2 = \overline{ED}^2 - \overline{PD}^2$,

on conclurra . . $\overline{EP}^2 = 4\overline{PD}^2 - \overline{PD}^2 = 3$

Et . . . . . $EP = \sqrt{3\overline{PD}^2} = PD \times$

Mais $EH = EP + PH = EP + DL$.

Donc . . . . $EH = DL + PD \times$
$= DL + DG \times$

PROPOSITION VI.

147, 338. *Si au ſinus d'un angle moindre que de 60*

grés, on ajoute le ſinus de ſa différence avec l'angle de 60 degrés, la ſomme ſera le ſinus d'un angle qui ſurpaſſera autant 60 degrés que le premier en eſt ſurpaſſé.

C'eſt-à-dire, qu'en prenant dans l'angle droit ACF, l'angle FCB de 60 degrés, puis l'angle FCE moindre de la quantité ECB; faiſant l'arc BD = l'arc EB pour avoir l'angle FCD qui ſurpaſſe autant l'angle FCB de 60 degrés, que l'angle FCE eſt ſurpaſſé par le même angle FCB; menant le ſinus ER de l'angle FCE, le ſinus EG ou DG de l'angle ECB ou BCD, enfin le ſinus DT de l'angle FCD, il faudra prouver que . . DT = ER + EG ou = ER + DG.

DÉMONSTRATION.

Par la conſtruction l'angle BCA ſera de 30 degrés; ainſi on démontrera comme ci-deſſus (n°. 337) que l'angle PED eſt de 30 degrés, d'où l'on déduira, comme l'on a fait, que PD = DG; on a d'ailleurs PT = ER (n°. 95).

Donc . . DT = PT + PD = ER + DG.

REMARQUE.

339. On fera voir dans la ſuite qu'à l'aide des ſix propoſitions que l'on vient de démontrer, on peut, en ſuppoſant le rayon des différens angles, égal à un nombre déterminé de parties égales, déterminer en parties de ce rayon la valeur des angles depuis une minute juſqu'à 90 degrés.

ARTICLE III.

Propriétés pour ſervir au calcul des triangles.

PROPOSITION I.

340. *Dans tout triangle rectangle* ABC, *le rayon eſt au ſinus de chacun des deux angles aigus* C, A, Fig. 144

comme l'hypothénuſe eſt à chacun des côtés AB, B *oppoſés aux angles* C, A.

Ce que l'on peut exprimer ainſi . . . R:S.C:S.A :: AC : AB : B

DE'MONSTRATION.

Cette propoſition eſt une ſuite néceſſaire du 328, n. 2. où l'on a vu que l'hypothénuſe AC ét priſe pour le rayon de l'angle A, le côté BC opp à l'angle A, devient le ſinus de cet angle ; cette n me hypothénuſe AC étant priſe pour le rayon de l'a gle C, le côté AB oppoſé à cet angle C, devient ſinus de l'angle C : ainſi l'hypothénuſe eſt à cha côté de l'angle droit, comme le rayon eſt au ſinus l'angle aigu oppoſé à chacun des côtés de l'angle dr

PROPOSITION II.

g. 144. 341. *Dans tout triangle rectangle* ABC, *l'un côtés de l'angle droit lequel on voudra, étant pris p le rayon de l'angle aigu qui lui eſt adjacent, l'au côté de l'angle droit ſera la tangente de cet angle, l'hypothénuſe en ſera la ſécante.*

Par exemple, ſi on prend le côté AB pour rayon de l'angle aigu A, BC ſera la tangente l'angle A, & AC la ſécante ; de façon que l'on a

. . . . . R : T.A : Séc. A :: AB : BC : A

Et en prenant le côté BC pour le rayon de l'gle aigu C, AB ſera la tangente de cet angle C, AC en ſera la ſécante ; ce qui donnera . .

. . . . . R : T.C : Séc. C :: BC : AB : A

DE'MONSTRATION.

Cette propoſition n'eſt qu'une application des d nitions de la tangente & de la ſécante.

En effet, à cauſe de l'angle droit B dans le triangle ectangle ABC, les côtés AB, CB de l'angle droit ont réciproquement perpendiculaires l'un à l'autre.

Ainſi AB étant pris pour rayon, BC ſera une perendiculaire élevée à l'extrêmité du rayon, & termiée à la rencontre de l'autre côté AC de l'angle A; qui rend BC tangente, & AC ſécante de l'angle . (n°. 324).

BC étant pris pour rayon de l'angle C, AB ſera ne perpendiculaire élevée à l'extrêmité du rayon, & rminée à la rencontre de l'autre côté CA de l'angle ; ce qui rend AB tangente, & CA ſécante de l'anle C.

PROPOSITION III.

342. *Dans tout triangle* ABC, *les côtés ſont proportionnels aux ſinus des angles qui leur ſont oppoſés.* Fig. 143.

DE'MONSTRATION.

On a déja vu (n°. 328, n. 1.) que la moitié de haque côté du triangle ABC, peut être regardé comme le ſinus de l'angle qui lui eſt oppoſé; enſorte que A $= \frac{BC}{2}$, S. B $= \frac{AC}{2}$, S. C $= \frac{AB}{2}$; mais les côs BC, AC, AB ſont entr'eux comme leurs moitiés C $\frac{AC}{2}$, $\frac{AB}{2}$: donc les côtés BC, AC, AB ſont enux comme les ſinus des angles qui leur ſont opoſés.

Ce que l'on peut primer ainſi . . . BC : AC : AB : S. A : S. B : S. C.

PROPOSITION IV.

343. *Dans un triangle quelconque* ABC *ſcalene, ſi tire du ſommet du plus grand angle* B *ſur la baſe* AC Fig. 148.

ne perpendiculaire BD *qui diviſe cette baſe en c ſegmens* AD, DC *inégaux, on aura;*

Cette proportion { *la baſe* AB *eſt à la ſomme* AB+BC *des d autres côtés, comme la différ* AB—BC *de ces deux autres cô eſt à la différence* AD—DC *deux ſegmens de la baſe.*

DÉMONSTRATION.

Se rappellant les propriétés des ſécantes menées cercle d'un même point extérieur, on fera cette co truction.

On décrira un cercle qui ait le ſommet B pour c tre, & le plus petit BC des deux côtés de l'angl pour rayon, on prolongera l'autre côté AB juſqu'à circonférence.

Dans cette conſtruction l'on a, à cauſe de BG=B & de FD=DC (n°. 118) . . { AE=AB+B AG=AB—B AF=AD—D

Mais la propriété des ſécantes (n°. 318) . . . AC : AE :: AG : A

Donc en ſubſtituant aux trois derniers termes cette proportion leur valeur, AC : AB + BC :: A — BC : AD — DC.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION V.

3. 149.

344. *Dans tout triangle* ABC *qui n'eſt pas équilatéra*

on a cette proportion { *la ſomme* AB+BC *de deux côtés inégaux eſt la différence* BC—AB *de ces deux côté comme la tangente de la moitié de la ſom me des angles* BAC, BCA *faits ſur l troiſieme côté* AC, *eſt à la tangente de l demi-différence de ces mêmes angles,*

DÉMONSTRATION.

La proportion ſera démontrée ſi on parvient à repréſenter ſes quatre termes par des lignes droites qui ſoient des côtés homologues dans des triangles ſemblables. Voici la conſtruction :

On décrira un cercle qui ait pour centre le ſommet de l'angle fait par les deux côtés AB, BC, & pour rayon le plus grand BC de ces deux côtés ; on prolongera l'autre côté AB en G & en K à la circonférence ; on joindra les points G & K avec le point C par les cordes CG, CK, & l'on remarquera que l'angle GCK étant à la circonférence & appuyé ſur le diametre eſt droit (n°. 131) ; enfin on élevera au point G ſur GC la perpendiculaire GH, terminée à la rencontre du côté AC prolongée ; ce qui donnera ſur GC un ſecond triangle rectangle HGC.

Cela poſé,

On conſidérera que les droites HG, KC étant perpendiculaires ſur la même droite GC, ſont paralleles (n°. 91), & par conſéquent (n°. 87) les angles alternes faits ſur ces paralleles par les droites GK, HC ſont égaux ; ce qui donne les triangles GAH, KAC ſemblables, deſquels on tire cette proportion . . . . . AK : AG :: CK : GH.

On conſidérera enſuite que les quatre lignes droites AK, AG, CK, GH, qui compoſent cette proportion, repréſentent les termes de la proportion qu'il faut démontrer.

1°. BK étant (n°. 44) égal à BC, AK=AB+BC, ſomme de deux côtés inégaux du triangle ABC.

2°. On a auſſi évidemment AG=BC—AB, différence de ces mêmes côtés.

3°. En prenant GC pour rayon dans le triangle rectangle GCK, CK ſera (n°. 341) la tangente de

une perpendiculaire BD qui divise cette base en segmens AD, DC inégaux, on aura ;

Cette proportion { la base AB est à la somme AB+BC des autres côtés, comme la différence AB—BC de ces deux autres est à la différence AD des deux segmens de la base

DÉMONSTRATION

Se rappellant les propriétés des sécantes du cercle d'un même point extérieur, on fera

truction.

On décrira un cercle qui ait le sommet

tre, & le plus petit BC des deux côtés pour rayon, on prolongera l'autre côté

circonférence.

Dans cette construction l'on a, à cause

& de FD=DC (n°. 118) . . { AE = AG AF

Mais la propriété des sécantes (n°. 318) . . . AC : A

Donc en substituant aux trois der

cette proportion leur valeur, AC : A

— BC : AD — DC.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITIO

Fig. 149. 344. *Dans tout triangle* ABC *qui n*

on a cette proportion { *la somme* AB+BC *de*
est la différence BC— *comme la tangente de*
me des angles BAC
troisieme côté AC, *e*
demi-différence de c

l'angle KGC; mais l'angle KGC eſt la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA faits ſur le troiſieme côté AC; car l'angle KGC eſt la moitié de l'angle KBC au centre (n°. 128), cet angle KBC étant extérieur au triangle ABC, il eſt égal à la ſomme des angles BAC, BCA (n°. 141): donc l'angle KGC eſt moitié de la ſomme des angles BAC, BCA, & par conſéquent la droite CK étant la tangente de l'angle KGC, elle eſt la tangente de la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA, faits ſur le côté AC.

4°. En prenant encore GC pour rayon dans le triangle rectangle HGC, HG eſt tangente de l'angle HCG, & ſera par conſéquent auſſi la tangente de la moitié de la différence des angles BAC, BCA, ſi on fait voir que l'angle HCG eſt égal à la demi-différence des angles BAC, BCA; ce qui eſt clair: car l'angle BAC étant conſidéré comme extérieur à l'égard du triangle GAC, on a (n°. 341) l'angle BAC = l'angle AGC + ACG; l'angle AGC = l'angle BCG (n°. 147), à cauſe du triangle iſoſcele GBC. Donc l'angle BAC = l'angle BCG + ACG.

L'angle BCG eſt compoſé des angles BCA + ACG.

Donc l'angle BAC = BCA + ACG + ACG.

Et par conſéquent l'angle BAC = BCA + 2ACG.

D'où l'on tire en tranſpoſant & en diviſant par 2

. . . l'angle BAC — l'angle BCA = ACG.

C'eſt-à-dire, que l'angle ACG eſt la demi-différence des angles BAC, BCA faits ſur le côté AC.

Donc puiſque . . . AK : AG :: CK : GH, on conclurra que dans tout triangle ABC, la ſomme AB + BC de deux côtés inégaux eſt à leur différence BC — AB, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles BAC, BCA, faits ſur le troiſieme côté AC, eſt à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

PROPOSITION VI.

345. *Si dans différens cercles on prend des arcs* AS, *as de même nombre de degrés, les ſinus* SC, sc, *les tangentes* AT, at, *les ſécantes* OT, ot *de ces arcs, ou des angles* TOA, toa *qui ſont meſurés par ces arcs, ſont proportionnels aux rayons de ces cercles.* Fig. 150, 151.

Enſorte que l'on a $\begin{cases} SC : sc. \\ AT : at :: OA : oa. \\ OC : oc. \end{cases}$

DÉMONSTRATION.

Parce que les ſinus SC, *sc*, les tangentes AT, *at* ſont perpendiculaires (n°. 324, 327) ſur les rayons OA, *oa*, & que l'angle O eſt ſuppoſé égal à l'angle *o*, les triangles OCS, *ocs*, OAT, *oat* ſont ſemblables (n°. 271).

Ce qui donne $\begin{cases} SC : sc :: OS : os :: OA : oa. \\ AT : at :: OA : oa. \\ OT : ot :: OA : oa. \end{cases}$

Ce qu'il falloit démontrer.

CHAPITRE SEPTIEME.

Application du Chapitre ſixieme.

SECTION PREMIERE.

Application de la théorie des lignes coupées proportionnellement, & des triangles ſemblables.

PROBLÊME I.

152, 346. *DIVISER une droite* ac *donnée en des parties proportionnelles aux parties* ad, db *d'une ligne* ab *déja diviſée.*

SOLUTION.

Lorſque le triangle eſt coupé par une ou pluſieurs paralleles à la baſe, les ſegmens de l'un des côtés ſont proportionnels aux ſegmens de l'autre (n°. 267).

Donc, pour diviſer la droite *ac* en des parties qui ſoient entr'elles comme les parties *ad*, *db* de la droite diviſée *ab*, on fera un angle quelconque XAZ, dont les côtés AX, AZ ſoient indéfinis, & l'on portera ſur les côtés de cet angle, à commencer du ſommet A, les deux droites *ac*, *ab*; à ſavoir, *ac* ſur AX de A en C, & *ab* ſur AZ de A en B.

Puis ayant joint les points B, C par la droite BC, & ayant pris ſur AB la partie AD égale à la partie *ad* de la droite *ab*, on menera par le point D une parallele DE à BC; cette parallele diviſera AC au point E dans les parties AE, EC proportionnelles aux parties AD, DB, enſorte que l'on aura AE : EC :: AD : DB.

Puiſque dans le triangle BAC les côtés AB, AC ſont (par la conſtruction) coupés parallelement à la baſe BC par la droite DE.

Par conſéquent, ſi l'on porte ſur $ac = AC$, le ſegment AE de a en e, ce qui donnera $ec = EC$, comme on a d'ailleurs (par la conſtruction) $ad = AD$, $db = DB$, on conclurra . . . $ae : ec :: ad : db$.

Ce qu'il falloit exécuter.

PROBLÊME II.

347. *Diviſer une droite donnée* AG *en un nombre déterminé de parties égales.* Fig. 15.

SOLUTION.

On tirera par l'extrêmité A de la droite AG une droite indéfinie AX qui faſſe avec AG un angle quelconque XAG; ouvrant le compas à volonté, on portera la même ouverture ſur l'indéfinie AX ſucceſſivement de A en b, de b en c, de c en d, &c. juſqu'en g, autant de fois que l'on demande de parties égales dans la droite AG. Par cette conſtruction, la droite Ag, priſe ſur l'indéfinie AX, ſera diviſée en autant de parties égales que l'on en demandera dans la droite déterminée AG, & le problême ſe réduira à diviſer la droite AG en parties proportionnelles aux parties Ab, bc, cd, &c. de la droite Ag.

Ce que l'on exécutera comme dans le problême précédent, en joignant les points G, g par la droite Gg, & en menant enſuite à cette droite par les points b, c, d, e, f de diviſion de la droite Ag, les paralleles bB, cC, dD, eE, fF : car à cauſe des paralleles, on aura (n°. 267) . . . . . .

$AB : BC : CD : DE : EF : FG :: Ab : bc : cd : de : ef : fg$.

REMARQUE.

§. 155. 348. Que ſi on propoſoit de diviſer une droite donnée en un grand nombre de parties égales; exemple, en 100; pour repréſenter, par exemple, toiſes; comme, eu égard à la petiteſſe de la ligne. & au grand nombre de parties que l'on demande détermination géométrique de chacune de ces pa ſeroit très-longue, & même ne peut guere avoir li on ſe contente alors de diviſer géométriquemen droite AB en grandes parties. Dans l'exemple pr dent, où l'on propoſe de diviſer AB en 100 pa pour repréſenter 100 toiſes, on la diviſera en 10 ties égales dont chacune repréſentera 10 toiſes: l' de ces parties, par exemple, A 10 pourra ſe div géométriquement en deux parties égales A. 5, & 5. dont chacune repréſentera 5 toiſes; puis on divi à l'œil & avec le compas ſimple chacune de ces d parties en cinq autres dont chacune exprimera toiſe.

On obſervera que lorſque l'on diviſe ainſi droite AB en parties égales, pour repréſenter par parties des meſures déterminées; par exemple, toiſes ou des pieds, &c. cette droite ainſi diviſé nomme *échelle*.

PROBLÊME III.

349. *Trouver une droite quatrieme proportionnel trois lignes données.*

PREMIERE SOLUTION.

§. 156, Lorſque les côtés du triangle ſont coupés para lement à la baſe, les ſegmens d'un côté ſont pro tionnels aux ſegmens correſpondans de l'autre (267).

Donc on trouvera une quatrieme proportionnelle aux trois droites *ab*, *bc*, *ad* données par la méthode qui ſuit.

On fera un angle quelconque XAZ dont les côtés ſoient indéfinis; on pourra ſur l'un AX des côtés, à commencer du ſommet A, la premiere droite *ab* de A en B, la ſeconde *bc* de B en C, & l'on prendra ſur l'autre côté AZ, depuis le ſommet A, une partie AD égale à la troiſieme ligne *ad*.

On joindra par une droite BD les extrêmités B, D de la premiere & de la troiſieme proportionnelles; enfin on menera à cette droite BD une parallele CE par l'extrêmité C de la ſeconde proportionnelle BC. La partie DE, compriſe entre les paralleles BD, CE, ſera la quatrieme proportionnelle cherchée.

Car il réſulte de la conſtruction, un triangle CAE coupé par une droite BD parallele à la baſe CE; & par conſéquent (n°. 267) AB : BC :: AD : DE. Donc en ſubſtituant les lignes données *ab* : *bc* :: *ad* : DE.

SECONDE SOLUTION.

Lorſque les côtés du triangle ſont coupés paralléle- *Fig.* 158
ment à la baſe, les côtés entiers ſont proportionnels 159.
à leurs ſegmens correſpondans (n°. 267). Donc étant données les trois lignes *ab*, *ac*, *ad*, on pourra leur trouver une quatrieme proportionnelle par la méthode qui ſuit.

Ayant fait un angle quelconque XAZ, dont les côtés ſoient indéfinis, on prendra ſur l'un AX des côtés, à commencer du ſommet A, des parties AB, AC égales aux deux premieres proportionnelles *ab*, *ac*, chacune à chacune; ſur l'autre côté AZ une partie AD égale à la troiſieme proportionnelle *ad*; on joindra par une droite BD les extrêmités B, D de la premiere & de la troiſieme proportionnelle; enfin on

menera à cette droite BD une parallele CE par l'extrêmité C de la ſeconde proportionnelle.

La partie AE, priſe depuis le ſommet A, ſera la quatrieme proportionnelle cherchée.

Car dans le triangle CAE la droite BD étant parallele à la baſe CE, on a AB : AC :: AD : AE. Donc en ſubſtituant les lignes données *ab* : *ac* :: *ad* : AE.

Ce qu'il falloit trouver.

REMARQUE.

350. Une troiſieme proportionnelle à deux droites données, étant au fond une quatrieme proportionnelle à trois droites, dont la troiſieme eſt égale à la ſeconde, il eſt évident que l'on trouvera une troiſieme proportionnelle à deux lignes données par l'une ou l'autre des deux méthodes que l'on vient de donner pour trouver une quatrieme proportionnelle à trois lignes données.

PROBLÊME IV.

§. 160, 351. *Diviſer pluſieurs lignes droites* cd, mn, *&c. de différentes grandeurs en des parties proportionnelles à celles* ae, ef, fb *d'une droite* ab *donnée.*

SOLUTION.

Etant prévenu (n°. 269), que dans un triangle quelconque toute droite parallele à la baſe, & compriſe entre les côtés ou leurs prolongemens, eſt coupé par des droites indéfinies menées des ſommets par différens points de la baſe en des ſegmens proportionnels aux ſegmens de cette baſe ; on déduira aiſément pour la ſolution du problême propoſé, la méthode qui ſuit.

On tirera une droite AB égale à la droite *ab* diviſée, & l'on marquera ſur cette droite AB les parties

AE, EF, FB égales aux parties *ae*, *ef*, *fb* chacune à chacune; on décrira ſur la droite AB un triangle équilatéral AOB, & l'on menera du ſommet O aux points E, F de diviſion de la baſe les droites OE, OF que l'on prolongera indéfiniment, de même que les côtés OA, OB.

Cette conſtruction faite, ſi l'on veut d'abord diviſer la droite *cd*, on la portera du ſommet O en C & en D ſur les côtés OA, OB, & l'on tirera enſuite la droite CD.

Comme cette droite CD eſt évidemment parallele à la baſe AB, puiſque (n°. 268) les côtés OA, OB, qui ſont égaux chacun à AB, ſont viſiblement proportionnels aux ſegmens OC, OD qui ſont égaux chacun à la droite *cd*.

1°. Cette droite CD ſera diviſée en ſegmens proportionnels aux ſegmens correſpondans de la baſe AB (n°. 269).

C'eſt-à-dire, que l'on aura CG:GH:HD::AE:EF:FB.

Et comme l'on a fait les ſegmens AE, EF, FB de la baſe AB égaux aux ſegmens *ae*, *ef*, *fb* de la droite diviſée *ab*, on aura encore CG:GH:HD::*ae*:*ef*:*fb*. *Fig.* 161.

2°. Cette droite CD ſera encore égale à la droite *cd* que l'on ſe propoſoit de diviſer.

Car CD étant parallele à la baſe AB, le triangle COD ſera ſemblable (n°. 267) au triangle AOB; & comme ce triangle AOB eſt équilatéral, COD ſera auſſi équilatéral, d'où l'on tire CD = CO; & comme l'on a fait CO = *cd*, on conclurra CD = *cd*.

Ainſi en portant ſur *cd* de *c* en *g* le ſegment CG, de *g* en *h* le ſegment GH; ce qui donnera *hd* = HD, on aura . . . *cg*:*gh*:*hd*::*ae*:*ef*:*fb*.

On portera de même la droite *mn* du ſommet O en M & en N ſur les côtés OA, OB prolongés, s'il eſt néceſſaire, & entre les points M, N on tirera la *Fig.* 161.

droite MN qui ſera diviſée par les indéfinies OQ, OP en parties proportionnelles à celles de la baſe AB, & ſera de plus égale à la droite *mn* que l'on ſe propoſoit de diviſer; ce que l'on démontrera comme ci-deſſus.

PROBLÊME V.

352. *Faire un triangle ſemblable à un triangle donné.*

SOLUTION.

Deux triangles ſont ſemblables lorſque.. deux angles de l'un ſont égaux à deux angles de l'autre chacun à chacun (n°. 271), ou qu'ils ont un angle égal compris entre des côtés directement proportionnels (n°. 270), ou qu'ils ont leurs trois côtés proportionnels (n°. 270).

Donc pour faire un triangle ſemblable au triangle ABC donné,

1°. 162. Si l'on connoît les angles A, C ſur la baſe AC, on fera ſur une ligne *ac* donnée, ou priſe à volonté, deux angles *a*, *c* égaux aux angles A, C chacun à chacun (n°. 168); & le triangle *abc* ſera ſemblable au triangle ABC.

2°. Si l'on connoît dans le triangle ABC deux côtés AB, BC en meſures déterminées, par exemple, en toiſes, & la valeur de l'angle B compris entre ces côtés; on fera (n°. 180) un triangle *abc*, dont les côtés *ab*, *bc* contiennent chacun autant de parties de l'échelle que leurs correſpondans AB, BC contiennent de meſures déterminées, & dont l'angle *b* compris entre les côtés *ab*, *bc* ſoit égal à l'angle correſpondant B.

3°. Si on connoît en meſures déterminées, par exemple en toiſes, les trois côtés AB, BC, AC du triangle ABC, on fera (n°. 179) un triangle *abc*,

dont les côtés *ab*, *bc*, *ac* contiennent chacun autant de parties d'une même échelle que leurs correſpondans AB, BC, AC contiennent de meſures déterminées.

PROBLÊME VI.

353. *Meſurer par le moyen des triangles ſemblables une ligne ſeulement acceſſible par l'une de ſes extrêmités.*

SOLUTION.

Soit la tour PB dont on demande la hauteur, en ſuppoſant que l'on peut s'approcher de ſon pied B. *Fig.* 163.

1°. On meſurera dans un terrein uni & horizontal, à commencer du pied B de la tour une baſe AB à l'extrêmité A, de laquelle on puiſſe appercevoir le ſommet P de la tour; on placera à cette extrêmité A le graphometre, de façon que ſon plan ſoit perpendiculaire à l'horizon, & que ſon diametre ſoit parallele à l'horizontale AB (on juge que le graphometre a cette poſition lorſque ſuſpendant un à-plomb au point de 90 degrés, marqué ſur le graphometre, le fil de l'à-plomb eſt parallele au plan du graphometre, & paſſe par ſon centre); le graphometre ayant cette ſituation, on dirigera l'alidade au ſommet P de la tour, & l'on prendra ſur cet inſtrument la valeur de l'angle PEF, fait par le rayon oblique EP, & par le rayon horizontal EF.

Ces opérations donneront un triangle EFP, dans lequel on connoîtra la baſe EF, laquelle eſt viſiblement égale à la baſe meſurée AB; & les angles ſur cette baſe EF, à ſavoir, l'angle PEF que l'on a meſuré, & l'angle EFP qui eſt droit, parce que la hauteur PB de la tour eſt perpendiculaire aux lignes horizontales AB, EF.

2°. On prendra ſur une échelle une droite *ef* égale

à autant de parties que la baſe meſurée AB ou ſon égale EF renferme de meſures déterminées, & l'on fera à l'extrêmité *e* l'angle *pef* égal à l'angle meſuré PEF, à l'extrêmité *f* l'angle *efp* droit comme l'angle EFP.

Le triangle *efp* qui réſultera ſera évidemment ſemblable au triangle EFP (n°. 271); le côté *pf* ſera homologue au côté PF, & ſi l'on porte le côté *pf* ſur la même échelle ſur laquelle on aura pris *ef*, le nombre des parties égales que ce côté *pf* renfermera, ſera préciſément le nombre des meſures déterminées qui ſeront contenues dans PF.

Car puiſque les triangles *epf*, EPF ſont ſemblables, on a . . . *pf*: PF :: *ef*: EF ou AB.

Or on a fait *ef* égal à autant de parties de l'échelle que AB ou EF renferme de meſures déterminées: donc *pf* renfermera de même autant de parties de l'échelle que PF renferme de meſures déterminées.

On connoîtra donc la hauteur PF, & en ajoutant la hauteur AE ou BF du graphometre, on aura la hauteur PB de la tour.

PROBLÊME VII.

354. *Meſurer par le moyen des triangles ſemblables une ligne entiérement inacceſſible.*

SOLUTION.

164. On propoſera, par exemple, de meſurer la diſtance totalement inacceſſible CD des objets C, D.

1°. On meſurera dans un terrein uni une baſe AB des extrêmités de laquelle on puiſſe voir les objets C, D; & imaginant des droites menées de chaque point C, D aux extrêmités A, B de la baſe AB, on prendra, avec le graphometre, la valeur des angles CAB, DAB, DBA, CBA (n°. 172).

Ces meſures étant priſes on aura deux triangles ACB, ADB, dans chacun deſquels on connoîtra la baſe AB & les angles ſur cette baſe.

2°. On prendra ſur une échelle une droite *ab* égale à autant de parties que l'on a trouvé de meſures déterminées dans la baſe AB; on fera ſur la ligne *ab* au point *a*, les angles *cab*, *dab* égaux aux angles CAB, DAB meſurés en A, & au point *b* les angles *dba*, *cba* égaux aux angles DBA, CBA meſurés en B.

Il réſultera ſur la droite *ab* deux triangles *acb*, *adb* ſemblables aux triangles ACB, ADB faits ſur AB, & de plus les deux premiers ſeront placés ſur *ab* comme les deux autres le ſont ſur AB.

Les points *c* & *d* ſeront donc poſés à l'égard de *ab*, comme les points C & D le ſont à l'égard de AB (n°. 284).

Et par conſéquent (n°. 290) les droites *cd*, CD, tirées chacune entre des points ſemblablement poſés à l'égard des droites *ab*, AB, ſont entr'elles comme ces droites; c'eſt-à-dire, que *ab* : AB :: *cd* : CD. *Fig.* 164

Donc, comme l'on a fait *ab* égal à autant de parties de l'échelle que AB contient de meſures déterminées, *cd* contiendra auſſi autant de parties de la même échelle que CD renferme de meſures déterminées; ainſi portant *cd* ſur l'échelle, on connoîtra le nombre de meſures contenu dans la diſtance totalement inacceſſible CD.

REMARQUE.

355. Il eſt évident que la ſolution du problême précédent, par le moyen des triangles ſemblables, ſuppoſe que les triangles ACB, ACD ſont dans un même plan, de même que leurs ſemblables *acd*, *adb* ſont dans un même autre plan; autrement les ſom- *Fig.* 16

mets C, D des premiers ne ſeroient pas poſés à l'égard de la baſe AB, comme les points *c*, *d* le ſont à l'égard de *ab*, ce qui eſt viſible; & les droites CD, *cd* menées entre les deux premiers, & entre les deux autres, ne ſeroient point proportionnelles à ces droites AB, *ab*.

SECTION II.

Application de la théorie des figures ſemblables.

PROBLÊME I.

165, 356. *UNE figure* ABCDE *étant donnée, décrire ſur une droite* ab, *comme homologue au côté* AB, *une figure ſemblable à la propoſée.*

SOLUTION.

Deux figures ſont ſemblables lorſqu'elles ſont compoſées d'un même nombre de triangles ſemblables & ſemblablement diſpoſés (n°. 280).

Donc, pour faire une figure ſemblable à la figure donnée ABCDE, & qui ait la droite *ab* donnée pour côté homologue au côté AB de la figure propoſée;

1°. Du ſommet de l'un A des angles adjacens au côté AB, on menera dans la figure ABCDE des droites AC, AD au ſommet des autres angles, pour décompoſer cette figure dans les triangles ABC, ACD, ADE.

2°. Ayant tiré une droite *ab* égale à la droite *ab* donnée, on fera à ſes extrêmités *a*, *b* des angles *cab*, *cba* égaux aux angles CAB, CBA adjacens au côté AB dans le triangle ABC; ce qui donnera un triangle *abc*

abc ſemblable au triangle ABC (n°. 271), & placé ſur *ab*, comme le triangle ABC eſt placé ſur le côté homologue AB.

On fera de même ſur *ac* un triangle *adc* ſemblable au triangle ADC, fait ſur le côté AC homologue à *ac*; & ſur *ad* homologue à AD, on fera un triangle *aed* ſemblable au triangle AED, &c.

Les triangles *abc*, *adc*, *aed* étant ainſi ſemblables aux triangles correſpondans ABC, ADC, AED, de plus, la diſpoſition de ces triangles étant ſemblable, les figures *abcde*, ABCDE que compoſent ces triangles ſeront ſemblables, & auront pour côtés homologues les droites AB, *ab*.

Ce qu'il falloit exécuter.

REMARQUE.

357. On déduira aiſément du n°. 281 une autre méthode de réſoudre le problême précédent.

PROBLÊME II.

358. *Lever le plan d'un terrein.*

Lever le plan d'un terrein c'eſt faire une figure ſemblable à ce terrein.

Si le terrein propoſé n'a que très-peu d'étendue, on pourra ſuivre cette méthode.

SOLUTION.

Soit le terrein ABCDE dont on veut lever le plan : *Fig.* 166.

1°. On décompoſera le terrein en triangles par des droites AC, AD menées du ſommet A de l'un des angles aux ſommets des autres, & l'on meſurera ces droites de même que les côtés AB, BC, CD, DE, EA.

On connoîtra par ce moyen les trois côtés de cha-

cun des triangles ABC, ACD, ADE qui
ſent le terrein.

2°. On fera ſur le papier autant de triangl
acd, *aed*, placés de la même façon, & dont
tés ſoient égaux à autant de parties de l'éch
l'on a trouvé de meſures dans les côtés hom
des triangles correſpondans ABC, ACD, A
terrein.

Suppoſant, par exemple, que dans le triang
on ait trouvé le côté AB = 100 toiſes, AC =
BC = 90, on prendra ſur l'échelle trois droi
ac, *bc*, telles que la premiere *ab* qui re
AB ſoit égale à 100 parties égales; la ſecond
repréſente AC ſoit égale à 110 parties égales;
ſieme *bc* qui repréſente BC ſoit égale à 90
égales; & avec ces trois droites *ab*, *ac*, *bc*, c
truira le triangle *abc* (n°. 179).

Puis ſur *ac* homologue à AC, on conſt
triangle *adc* dont les côtés *ad*, *dc* contiennen
de parties de l'échelle que leurs homologues A
contiennent de meſures déterminées.

Enfin ſur *ad* homologue à AD, on conſt
triangle *aed*, dont les côtés *ae*, *ed* ſoient
autant de parties de l'échelle qu'il y a de meſ
terminées dans les côtés homologues AE, ED

De cette conſtruction il réſultera une figure
évidemment ſemblable au terrein ABCDE,
ce terrein & cette figure conſtruite ſont co
d'un même nombre de triangles ſemblables (n
& diſpoſées de la même façon.

*Que ſi le terrein eſt d'une grandeur un peu co
ble, on en levera le plan de la maniere qui ſuit*

AUTRE SOLUTION.

Fig. 168. Soit le terrein ABGDEF dont on propoſe d
le plan.

)n marquera par deux jalons une droite AB plus grande dimenſion ; par exemple, entre mets des angles A, B, & l'on fera tomber ſur oite des ſommets des autres angles F, E, D, C pendiculaires (*a*) FG, EI, DK, CH, que ſurera de même que les ſegmens AG, GH, , KB de la droite AB coupée par les perpen- es.

Toutes ces meſures étant priſes ſur le terrein, apportera ſur le papier de cette ſorte.

t fait une échelle dont les parties repréſentent ures dont on s'eſt ſervi ſur le terrein, on ti- e droite *ab* qui contienne autant de parties ielle qu'il y a de meſures dans la droite AB; quera ſur cette droite *ab* les ſegmens *ag*, *gh*, , *kb*, égaux à autant de parties de l'échelle que nens correſpondans AG, GH, HI, IK, KB nent de meſures. *Fig.* 169.

points *g*, *h*, *i*, *k* on élevera les perpendicu- *gs*, *hc*, *ie*, *kd* égales auſſi à autant de parties ielle qu'il y a de meſures dans les perpendicu- orreſpondantes GF, HC, IE, KD; enfin par ſémités *a*, *c*, *d*, *b*, *e*, *f*, on menera les droites *l*, *db*, *be*, *ef*, *fa*.

On détermine ces perpendiculaires par le moyen de l'é- d'Arpenteur EFGH, qui n'eſt autre choſe qu'un cercle par deux diametres immobiles EG, HF qui ſe coupent s droits, & qui portent à leurs extrêmités des pinules ales à celles du graphometre. Pour trouver avec cet inſ- t les points G, H, I, K de la ligne AB, qui répondent liculairement aux ſommets des angles F, C, E, D, on courir ſur la ligne AB, juſqu'à ce que l'un de ſes diame- nt aligné ſur la ligne AB, l'on apperçoive par les pinules tre les piquets plantés aux ſommets des angles F, C, E, D, marque par d'autres piquets les points G, H, I, K de la B d'où les premiers ſont [illegible]. *Fig.* 167.

168, De cette conſtruction il réſulteta la figure *acdb* ſemblable à la figure ACDBEF.

Car ſi l'on mene dans ces deux figures les ligr correſpondantes FI, CK, & *fi*, *ck*, on aura d'abc les triangles rectangles P, Q, R, S, T, V ſemb bles à leurs correſpondans *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, pa que (n°. 270) ces triangles ont, par la conſtructic un angle droit compris entre des côtés proportionn

Les triangles correſpondans Y, *y* ſont encore ſe blables.

Car à cauſe de la ſimilitude des triangles Q, l'angle FIG = *fig*, & retranchant ces angles droits EIG, *eig*, on aura l'angle EIF = *eif*.

De plus, à cauſe de la ſimilitude des mêmes tria gles Q, *q*, qui donnent FI : *fi* :: FG : *fg*, *fi* cc tient évidemment autant de parties de l'échelle q FI contient de meſures. Par la conſtruction *ei* co tient auſſi autant de parties de l'échelle que EI co tient de meſures.

Donc . . . . . FI : *fi* :: EI :

C'eſt-à-dire, que les triangles Y, *y* ont un ang égal compris entre des côtés proportionnels, & ſo par conſéquent (n°. 270) ſemblables.

On prouvera de même que les triangles correſpo dans X & *x* ſont ſemblables.

La figure tracée *acdbef*, & la figure ACDBE du terrein ſont donc compoſées d'un même nomb de triangles ſemblables, & ſemblablement diſpoſé la figure *acdbef* eſt donc le plan du terrein ACDBE (n°. 280).

REMARQUE.

359. On pourra, par la méthode dont on vient d parler, exprimer les contours des terreins, les ſinuo ſités des chemins, les cours des rivieres, &c.

Par exemple, *ſi l'on propoſe de repréſenter les ſinuoſités du chemin* ABCDEFGHI *entre les points* A *&* I. Fig. 170

Après avoir marqué avec des piquets les droites AE, EI qui ſoutiennent les coudes du chemin propoſé, on fera tomber ſur ces droites des ſommets des angles B, C, D, F, G, H, des perpendiculaires BK, CL, DM, FN, GO, HP, que l'on meſurera de même que les ſegmens AK, KL, LM, ME, EN, NO, OP, PI des droites AE, EI coupées par les perpendiculaires, on prendra enſuite l'ouverture de l'angle AEI.

Ces meſures étant priſes ſur le terrein, on prendra ſur une échelle des droites *ae*, *ei* égales à autant de parties que les droites correſpondantes AE, EI renferment de meſures, on tracera ſur le papier ces droites *ae*, *ei* de façon qu'elles faſſent l'angle *aei* égal à l'angle AEI; on marquera ſur ces droites les ſegmens *ak*, *kl*, *lm*, *me*, *en*, *no*, *op* égaux à autant de parties de l'échelle que les ſegmens correſpondans AK, KL, LM, ME, EN, NO, OP renferment de meſures: aux points *k*, *l*, *m*, *n*, *o*, *p*, on élevera les perpendiculaires *kb*, *lc*, *md*, *nf*, *og*, *hp* égales auſſi à autant de parties de l'échelle qu'il y a de meſures dans les perpendiculaires correſpondantes KB, LC, MD, NE, OG, PH; enfin par les points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, on menera les droites *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fg*, *gh*, *hi*. Fig. 171

Et de cette conſtruction il réſultera la figure *abcdefghi* qui ſera l'expreſſion du chemin ſinueux ABCDEFGHI. Fig. 171 170.

PROBLÊME III.

360. *Lever le plan d'un terrein* ABCDEF, *dans lequel on ne peut ou l'on ne veut entrer.*

SOLUTION.

Deux figures ſont ſemblables lorſqu'elles ont un Fig. 17-

même nombre d'angles égaux chacun à chacun, que les côtés adjacens à ces angles égaux ſont directement proportionnels (n°. 274); donc pour lever e dehors le plan d'une figure ABCDEF qui ſera, ſi l' veut, un parc ou un terrein marécageux :

1°. On meſurera tous les côtés & tous les angles cette figure.

172, 2°. On tracera ſur le papier une ligne *ab* égal autant de parties de l'échelle que le côté correſpo dant AB a de meſures; on fera à l'extrêmité *b* l'an *abc* égal à l'angle ABC, & on donnera au côté autant de parties de l'échelle que l'on a trouvé de m ſures dans le côté correſpondant BC; on fera l'an *c* égal à l'angle C, & le côté *cd* égal à autant de p ties de l'échelle qu'il y a de meſures dans le côté C & ainſi de ſuite.

De cette conſtruction, il réſultera une figure *abc* dont les angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* ſeront égaux aux gles A, B, C, D, E, F, & dont les côtés *ab*, *b* *cd*, *de*, *ef*, *fa*, ſeront proportionnels aux côtés c reſpondans AB, BC, CD, DE, EF, FA.

Par conſéquent la figure *abcdef* ſera le plan terrein ABCDEF.

Ce qu'il falloit exécuter.

REMARQUE.

361. Lorſqu'on aura levé le plan *abcdef* du t rein ABCDEF, dans lequel on ne peut ou l'on veut entrer, on pourra, par le moyen du plan *abc* déterminer la ſurface du terrein ABCDEF.

En effet, que l'on imagine que des ſommets des gles correſpondans D, *d* de ces deux figures ſemb bles on a mené des droites DB, DA, DF, & *da*, *df* aux autres triangles, & que dans chacun o encore abaiſſé des mêmes ſommets D, *d* ſur les c

prolongés, s'il eſt néceſſaire, les perpendiculaires DI, DH, DL, DM, & *di, dh, dl, dm:*

1°. Les triangles CDB, BDA, ADF, FDE ſeront ſemblables (n°. 277) à leurs correſpondans *cdb, bda, adf, fde.*

2°. Dans les triangles correſpondans quelconques ADB, *adb*, on aura (n°. 292) DH : *dh* :: AB : *ab.*

Par conſéquent comme l'on a fait le côté *ab* du plan égal à autant de parties de l'échelle que le côté AB du terrein renferme de meſures déterminées, la hauteur DH du triangle ADB contiendra auſſi autant de meſures déterminées que la perpendiculaire correſpondante *dh* contiendra de parties de l'échelle.

Ainſi les perpendiculaires *di, dh, dl, dm*, étant portées ſur l'échelle du plan, feront connoître les nombres de meſures contenus dans les perpendiculaires correſpondantes DI, DH, DL, DM, qui ſont les hauteurs des triangles CDB, BDA, ADF, FDE qui compoſent enſemble la ſurface du terrein ABCDEF; & comme l'on connoît de plus dans ces triangles les baſes CB, BA, AF, FE qui ſont les côtés que l'on a meſurés pour lever le plan, on aura tout ce qu'il faut (n°. 216) pour déterminer la ſurface de chacun de ces triangles; leur ſomme donnera la ſurface du terrein ABCDEF. *Fig.* 173.

PROBLÊME IV.

362. *Faire la carte d'une grande campagne ou d'un pays.*

SOLUTION.

Faire la carte d'un pays, c'eſt repréſenter ſur le papier les objets ou points remarquables que ce pays contient dans une poſition ſemblable à celle qu'ils ont ſur le terrein, enſorte que les diſtances des points

marqués ſur la carte ſoient proportionnelles aux diſtances qui ſont entre les points correſpondans du pays ; c'eſt-à-dire, que les premieres ſoient égales à autant de parties de l'échelle que les dernieres renferment de perches ou de toiſes, ou d'autres meſures déterminées : on propoſera à ce ſujet la méthode qui ſuit.

174. Soient les points remarquables C, D, E, F, G, H, dont il faut repréſenter ſur la carte la ſituation.

1°. On meſurera une droite AB dans un terrein uni & aſſez élevé pour que l'on puiſſe appercevoir de chaque extrêmité A, B les objets C, D, E, F, &c. dont on veut déterminer la poſition.

Puis regardant les points C, D, E, F, &c. comme les ſommets d'autant de triangles ACB, ADB, AEB, AFB, &c. formés ſur la droite AB par des rayons viſuels menés de ces points aux extrêmités de cette droite ; on placera le graphometre en A, & l'on prendra la valeur des angles CAB, DAB, EAB, FAB, GAB, HAB ; on tranſportera le graphometre en B, pour y prendre de même la valeur des angles CBA, DBA, EBA, FBA, GBA, HBA.

2°. Ces opérations étant faites ſur le terrein, voici celles que l'on fera ſur le papier.

174, Ayant fait une échelle pour repréſenter par ſes parties égales les meſures déterminées, on commencera par tracer une droite *ab* égale à autant de parties de l'échelle que l'on a trouvé de meſures dans la baſe AB ; on fera enſuite ſur la druite *ab* au point *a*, les angles *cab*, *dab*, *eab*, *fab*, *gab*, *hab* égaux aux angles correſpondans CAB, DAB, EAB, FAB, GAB, HAB que l'on a meſuré au point A ; on fera de même ſur *ab* au point *b*, les angles *cba*, *dba*, *eba*, *fba*, *gba*, *hba* égaux aux angles correſpondans CBA, DBA, EBA, FBA, GBA, HBA que l'on a meſurés au point A.

Il réſultera de cette conſtruction des triangles *acb*, *adb*, *aeb*, *afb*, *agb*, *ahb* ſur la droite *ab* ſemblables (n°. 271) à leurs correſpondans ACB, ADB, AEB, AFB, AGB, AHB qui ſont ſur la droite AB; & les ſommets *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* des premiers repréſenteront les ſommets C, D, E, F, G, H des derniers, ou la ſituation des points obſervés C, D, E, F, G, H.

On l'aura démontré en faiſant voir que les diſtances qui ſont entre les points *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *b* marqués ſur la carte ſont proportionnelles aux diſtances qui ſont entre les points correſpondans A, C, D, E, F, G, H, B du terrein; ce qui eſt évident.

Car les points obſervés C, D, E, F, G, H, & les points correſpondans *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h* que l'on a marqués ſur la carte étant les ſommets des triangles ſemblables chacun à chacun, & placés de la même maniere ſur les baſes AB, *ab*, ſont poſés ſemblablement à l'égard des baſes AB, *ab* (n°. 284); les points A & *a* ſont auſſi des points ſemblablement poſés à l'égard des mêmes baſes AB, *ab* (n°. 283), & il en eſt de même des points B, *b*.

Par conſéquent (n°. 290) la droite que l'on menera entre deux quelconques des points A, C, D, E, F, G, H, B, ſera à la droite qui joindra deux des points correſpondans *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *b*, comme la baſe AB eſt à la baſe *ab*. *Fig.* 175.

D'où l'on conclut 1°. que les diſtances entre les points A, C, D, E, F, G, H, B du terrein ſeront proportionnelles aux diſtances entre les points correſpondans *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *b* de la carte; ce qui montre que les points *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *b*, ſont diſpoſés ſur la carte comme les points A, C, D, E, F, G, H, B le ſont ſur le terrein.

2°. Comme l'on a fait *ab* égal à autant de parties

de l'échelle que AB renferme de meſures, il eſt évident qu'en portant ſur l'échelle du plan les diſtances entre les points *a*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *b* de la carte, on connoîtra par les nombres de parties égales qu'elles renferment, les nombres de meſures contenues dans les diſtances compriſes entre les points correſpondans A, C, D, E, F, G, H, B du terrein.

REMARQUE.

174. 363. Si l'on vouloit étendre la carte, c'eſt-à-dire, marquer la poſition des objets qui ſeroient au-delà des points obſervés C, D, E, F, G, H, on prendroit pour baſe la diſtance entre deux quelconques des points obſervés; on feroit ſur cette baſe des opérations ſemblables à celles que l'on a faites ſur la baſe AB, puis on rapporteroit les triangles ſur la ligne de la carte qui ſeroit correſpondante à celle que l'on auroit priſe ſur le terrein pour une nouvelle baſe.

Par exemple, pour avoir la poſition du point M, on pourra prendre DE pour baſe, & ayant meſuré les angles MDE, MED, ſur la ligne *de* de la carte (laquelle eſt homologue à la ligne DE ſur le terrein), on fera au point *d* l'angle *mde* = MDE, & au point *e* l'angle *med* = MED; dans le nouveau triangle *dme*, le point *m* repréſentera le nouveau point M.

Car parce que les triangles DME, *dme* ſont ſemblables par la conſtruction, on a MD : *md* :: DE : *de*, parce que les points D & E ſont poſés à l'égard de AB, comme les points *d* & *e* le ſont à l'égard de *ab*, on a encore (n°. 284) DE : *de* :: AB : *ab*, d'où l'on déduit (n°. 245) . . . MD : *md* :: AB : *ab*.

C'eſt-à-dire, que les diſtances des points M & D, renferment autant de meſures que la diſtance *md* des points correſpondans *m* & *d*, renferme de parties de l'échelle, de même que la baſe AB contient autant

le meſures que la baſe *ab* contient de parties de l'échelle.

PROBLÊME V.

364. *La ſituation de trois points* A, B, C, *étant repréſentée ſur une carte par* a, b, c, *exprimer ſur la même carte la poſition d'un quatrieme point* D, *étant donnés ſeulement les angles* ADB, BDC, *ſous leſquels on voit du point* D *les points* A *&* B, *&les points* B *&* C. Fig. 171 177.

SOLUTION.

Si l'on imagine qu'une circonférence X paſſe par les trois points A, B, D, ſur le terrein, & qu'une circonférence Z paſſe par les trois points B, D, C, il eſt évident que le point D ſera un point commun aux deux circonférences X & Z, & le ſommet commun de deux angles dans les ſegmens ADB, BDC, appuyés ſur AB, BC.

Ainſi ſi l'on décrit (n°. 175) ſur la ligne *ab* correſpondante à AB, un ſegment capable d'un angle *adb* égal à l'angle ADB, & ſur la droite *bc* correſpondante à BC un ſegment capable d'un angle *bdc* égal à l'angle BDC; l'interſection *d* des circonférences x & z correſpondantes aux circonférences X & Z, ſera viſiblement la poſition du point D.

SECTION III.

Application de la théorie des lignes proportionnelles considérées dans différentes sortes de triangles, dans quelques poligones réguliers, & dans le cercle.

PROBLÊME I.

178. 365. DANS *le triangle rectangle quelconque* ABC, 1°. *étant donnés deux côtés quelconques, connoître le troisieme.*

2°. *Etant donnés les trois côtés* AB, BC, AC, *connoître chaque segment* AD, DC *de l'hypothénuse, fait par la perpendiculaire* BD *abaissée du sommet* B *de l'angle droit, & déterminer ensuite cette perpendiculaire* BD.

SOLUTION.

1°. Pour déterminer le troisieme côté du triangle rectangle ABC, lorsque l'on aura les deux autres il suffira de se rappeller qu'en faisant le quarré de l'hypothénuse AC, & les quarrés des deux côtés AB, BC de l'angle droit, on a $\begin{cases} \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \text{ (n°. 304).} \\ \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 \text{ (n°. 305).} \\ \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2. \end{cases}$

Extrayant la racine quarrée de chaque membre dans ces trois équations, il vient (*axiome* 11) . . . .

. . . . . $\begin{cases} AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \\ AB = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2} \\ BC = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2} \end{cases}$

Et la premiere de ces trois équations montre que lorsque l'on aura la valeur des côtés AB, BC de l'an-

gle droit, on aura l'hypothénuſe AC en faiſant les quarrés des côtés AB, BC de l'angle droit, en ajoutant enſemble ces quarrés, & en prenant la racine quarrée de la ſomme.

La ſeconde & la troiſieme équations montrent que lorſque l'on aura la valeur de l'hypothénuſe AC, & celle de l'un des côtés de l'angle droit, on déterminera l'autre côté de l'angle droit, en faiſant le quarré de l'hypothénuſe, & celui du côté connu de l'angle droit, en prenant la différence de ces quarrés, & en extrayant la racine quarrée de cette différence.

2°. Lorſque l'on connoîtra dans le triangle rectangle ABC, les trois côtés AB, BC, AC, on déterminera chaque ſegment AD, DC de l'hypothénuſe fait par la perpendiculaire BD abaiſſée du ſommet de l'angle droit, en ſe rappellant que l'on a (n°. 303) Fig. 1

$$\left.\begin{array}{l} :: AD : AB : AC \\ :: DC : BC : AC. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots$$

Car de ces proportions on déduit (n°. 253) les équations . . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} AD \times AC = \overline{AB}^2 \\ AC \times DC = \overline{BC}^2, \end{array}\right.$$

qui donnent en dégageant les ſegmens AD, DC, (*axiome* 11) . . . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} AD = \dfrac{\overline{AB}^2}{AC} \\ DC = \dfrac{\overline{BC}^2}{AC}. \end{array}\right.$$

Ce qui montre que chaque ſegment AD, DC de l'hypothénuſe AC eſt égal au quarré du côté adjacent à ce ſegment diviſé par l'hypothénuſe AC.

Lorſque l'on aura déterminé les ſegmens AD, DC de l'hypothénuſe fait par la perpendiculaire BD, on déterminera cette perpendiculaire par la premiere partie de ce problême, en la conſidérant comme côté dans les triangles rectangles ADB, BDC, dans chacun

deſquels on connoît l'hypothénuſe, & l'un des côtés de l'angle droit.

Dans le triangle rectangle ADB,

on aura . . . . . $BD = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2}$

Dans le triangle rectangle BDC,

on aura . . . . . $BD = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{DC}^2}$

PROBLÊME II.

179. 366. *Connoiſſant les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle quelconque* ABC, *& ſuppoſant que du ſommet du plus grand angle* B *on a abaiſſé une perpendiculaire* BD *ſur le côté oppoſé* AC, *connoître* 1°. *l'un quelconque, par exemple,* AD *des ſegmens du côté* AC, *faits par la perpendiculaire* BD.

Connoître 2°. *la perpendiculaire* BD.

3°. *Enfin déterminer la ſurface du triangle* ABC.

SOLUTION.

Ayant fait dans le triangle ABC, $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, la perpendiculaire BD cherchée $= x$, le ſegment cherché $AD = y$.

1°. En ſe rappellant la valeur du quarré du côté BC de l'angle B du ſommet duquel on a abaiſſé la perpendiculaire (n°. 307), on formera cette équation . . . . . $b^2 = a^2 + c^2 - 2cy$, de laquelle, en tranſportant b^2 & $-2cy$, & diviſant enſuite par $2c$, on tirera pour la valeur du ſegment $AD = y$ . . . $y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$.

2°. En conſidérant la perpendiculaire $BD = x$, dans le triangle rectangle ABD, dans lequel on connoît l'hypothénuſe AB, & l'on vient de déterminer la valeur du côté AD de l'angle droit ADB, on for-

mera cette équation . . . . $x = \sqrt{a^2 - y^2}$,
dans laquelle, ſi on met la
valeur de y^2, laquelle eſt . . . $\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2$
on aura pour la valeur de la
perpendiculaire BD, $y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2}$

Ce qui devient, en faiſant les opérations indiquées, c'eſt-à-dire, en faiſant le quarré de $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$; en retranchant les termes de ce quarré; en donnant le même dénominateur à tout le ſecond membre; enfin en réduiſant, $y = \sqrt{\frac{2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}}$

3°. Lorſque l'on aura déterminé la perpendiculaire BD, il eſt évident qu'en prenant cette perpendiculaire BD pour la hauteur du triangle ABC, & le côté connu AC pour la baſe, l'on aura tout ce qu'il faut pour déterminer la ſurface du triangle; il ne s'agira plus (n°. 216) que de multiplier cette hauteur BD par la moitié de la baſe AC. Fig. 17

Reprenant l'équation de la hauteur y . . . .
$y = \sqrt{\frac{2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}}$

Multipliant chaque membre par $\frac{c}{2}$, moitié de la baſe AC, il viendra (*axiome* 11) . . . . . .
$\frac{yc}{2} = \frac{c}{2}\sqrt{\frac{2a^2c^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4c^2}}$

En faiſant paſſer $\frac{c}{2}$ ſous le radical $\sqrt{}$, & en réduiſant, on aura l'équation . . . . . .
$\frac{yc}{2} = \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}}$

dont le ſecond membre eſt évidemment l'expreſſion de la ſurface toute connue du triangle ABC.

REMARQUE.

179. 367. De ce que dans l'expreſſion . . . . .

$$\ldots \sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}}$$

de la ſurface du triangle ABC, dont on connoît les trois côtés AB, BC, AC, ou a, b, c, il n'entre que l'expreſſion des côtés du triangle, il eſt naturel de conjecturer qu'il ſeroit poſſible de déterminer la ſurface du triangle par la ſeule connoiſſance de ſes côtés, ſans être obligé de calculer auparavant ſa hauteur. Voici la méthode :

On fait la ſomme des trois côtés du triangle, & l'on prend la moitié de cette ſomme ; de cette moitié on ôte ſéparément chaque côté du triangle, ce qui donne trois reſtes qui, avec la demi-ſomme des trois côtés, font quatre quantités ; on multiplie enſemble ces quatre quantités, & l'on prend enſuite la racine quarrée du produit : cette racine eſt la ſurface du triangle.

Faiſant en effet les opérations que l'on vient d'indiquer, il vient :

$\frac{a+b+c}{2}$ demi-ſomme des côtés a, b, c.

$\frac{-a+b+c}{2}$ reſte lorſque l'on retranche le côté a de $\frac{a+b+c}{2}$.

$\frac{+a-b+c}{2}$ reſte lorſque l'on retranche le côté b de $\frac{a+b+c}{2}$.

$\frac{+a+b-c}{2}$ reſte lorſque l'on retranche le côté c de $\frac{a+b+c}{2}$.

Multipliant

Multipliant enſemble ces quatre quantités, & réduiſant les termes ſemblables que donneront les produits particuliers, il vient . . . . . .

$$\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}$$

Affectant ce produit du ſigne radical du ſecond degré, on a $\sqrt{\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{16}}$

Ce qui eſt l'expreſſion que l'on a trouvé pour la ſurface du triangle dont les trois côtés connus ſont AB, BC, AC, ou a, b, c.

Donc, &c.

PROBLÈME III.

368. *Diviſer une droite* AB *donnée en moyenne & extrême raiſon.*

SOLUTION.

On ſe rappellera qu'une ſécante & une tangente tant menées à un cercle d'un même point pris en-dehors de ce cercle, ſi la partie de la ſécante comriſe dans le cercle eſt égale à la tangente, la partie xtérieure de la même ſécante eſt égale à la médiane le la tangente diviſée en moyenne & extrême raion (n°. 321), & l'on conclurra cette conſtruction our diviſer la droite AB en moyenne & extrême aiſon. *Fig.* 183

A l'extrêmité B de la droite AB donnée, on élera ſur cette droite une perpendiculaire BO égale à a moitié de cette droite; du point O comme centre, vec un rayon égal à cette perpendiculaire, on décrira une circonférence; par l'extrêmité A de la droite AB, & par le centre O, on tirera la ſécante AF; enfin on portera la partie extérieure AD de cette ſécante ſur la droite AB de A en E, & cette droite AB ſera

diviſée au point E en moyenne & extrême raiſon; enſorte que l'on aura . . . ∴ AB : AE : EB.

Car dans cette conſtruction la droite AB ſera tangente, puiſqu'elle eſt perpendiculaire au point B ſur le rayon OB (n°. 115) : la partie DF de la ſécante, compriſe dans le cercle, étant un diametre, ſera égale à 2 OB; par conſéquent égale à la tangente AB, parce que l'on a fait OB égale à la moitié de AB.

Donc (n°. 321) la partie extérieure AD de la ſécante AF, eſt la médiane de la droite AB diviſée en moyenne & extrême raiſon; donc en portant, comme l'on a fait, AD de A en E ſur AB, cette droite AB ſera diviſée en moyenne & extrême raiſon.

REMARQUE.

183. 369. De la ſolution du problême précédent on déduit évidemment que pour diviſer une droite AB donnée en moyenne & extrême raiſon, il ſuffit de faire un triangle ABO rectangle, dont l'un AB des côtés de l'angle droit ſoit la droite AB qu'il faut diviſer, & l'autre côté BO de l'angle droit ſoit la moitié de la droite AB qu'il faut diviſer; & porter enſuite ſur AB la différence AD de l'hypothénuſe AO, & du côté OB.

PROBLÊME IV.

180. 370. *Inſcrire dans un Cercle* X *donné*,

1°. *Un décagone régulier.*

2°. *Un pentagone régulier.*

3°. *Trouver par une ſeule conſtruction les côtés de l'exagone, du décagone & du pentagone régulier, inſcriptibles dans un même cercle* X.

SOLUTION.

1°. L'on ſait que le côté du décagone régulier inſcrit

dans un cercle, eſt la médiane du rayon du cercle diviſé en moyenne & extrême raiſon (n°. 309). Donc pour inſcrire dans le cercle donné X un décagone régulier, on diviſera d'abord le rayon OA dans ce cercle en moyenne & extrême raiſon (n°. 368); puis l'on portera ſa médiane dix fois ſur la circonférence.

2°. Le côté du pentagone régulier inſcrit dans un cercle, ſoutient un arc double de celui qui eſt ſoutenu par le côté du décagone régulier inſcrit dans le même cercle.

Donc pour inſcrire dans le cercle X un pentagone régulier, on commencera par déterminer le côté AB du décagone régulier inſcriptible dans le même cercle X, pour avoir l'arc AB ſoutenu par ce côté, on fera l'arc ABC double de l'arc AB, & l'on menera la corde AC qui ſera le côté du pentagone régulier inſcrit au cercle X. *Fig.* 18

3°. Si on conſidere que le côté de l'exagone régulier inſcrit dans un cercle eſt égal au rayon de ce cercle (n°. 155); que le côté du décagone régulier inſcrit dans un cercle eſt la médiane du rayon diviſé en moyenne & extrême raiſon (n°. 309); qu'enfin le côté du pentagone régulier inſcrit dans un cercle eſt tel que ſon quarré eſt égal à la ſomme des quarrés du côté de l'exagone régulier, & du côté du décagone régulier, inſcriptibles dans le même cercle (n°. 311), on conclurra la conſtruction qui ſuit pour déterminer à la fois les côtés de ces trois poligones inſcriptibles dans un même cercle X.

On tirera dans le cercle X un diametre AB; on élevera ſur ce diametre un rayon perpendiculaire OD; ayant diviſé le rayon OB en deux également au point C, de ce point C comme centre & de l'intervalle CD on décrira l'arc DH, que l'on ſoutendra par la corde DH. *Fig.* 18

Il réſultera le triangle rectangle DOH, dont les trois côtés OD, OH, HD, ſont les côtés de l'exagone, du décagone & du pentagone réguliers inſcriptibles dans le cercle X.

1°. OD étant le rayon du cercle X, eſt dès-lors (n°. 155) le côté de l'exagone régulier inſcriptible dans ce cercle.

2°. HO eſt le côté du décagone régulier inſcriptible dans le cercle X; car ſi du point C comme centre, & de l'intervalle OC, on décrit l'arc OE, comme dans le triangle rectangle COD, OC eſt par la conſtruction la moitié de OB, ou de OD, la différence DE de l'hypothénuſe DC au moindre côté OC de l'angle droit, ſera (n°. 369) la médiane du rayon OD diviſé en moyenne & extrême raiſon; & comme HO = DE, parce que (n°. 44) HC = DC, & OC = EC, HO ſera auſſi la médiane du rayon OD diviſé en moyenne & extrême raiſon, & par conſéquent le côté du décagone régulier inſcriptible dans le cercle X (n°. 309).

3°. Dans le triangle rectangle HOD, on a (n°. 304) . . . . . $\overline{HD}^2 = \overline{HO}^2 + \overline{OD}^2$.

C'eſt-à-dire, que le quarré de HD eſt égal à la ſomme des quarrés HO que l'on vient de démontrer être le côté du décagone régulier, & de OD que l'on ſait encore être le côté de l'exagone régulier inſcriptible dans le même cercle X.

Et comme cette propriété ne convient qu'au côté du pentagone (n°. 311), il eſt encore viſible que HD eſt le côté du pentagone régulier inſcriptible dans le cercle X.

PROBLÊME V.

182. 371. *Inſcrire dans un cercle* X *donné un quindécagone; c'eſt-à-dire, un poligone régulier de* 15 *côtés.*

SOLUTION.

Le problême ſe réduit évidemment à déterminer ſur la circonférence du cercle X donné un arc qui ſoit la quinzieme partie de la circonférence, c'eſt-à-dire, de vingt-quatre degrés.

Or en comparant enſemble l'arc ſoutenu par le côté du triangle équilatéral, & le double de l'arc ſoutenu par le côté du pentagone régulier inſcrit au même cercle, on trouve que leur différence eſt préciſément de vingt-quatre degrés.

Donc pour inſcrire dans le cercle X un quindécagone régulier, on portera ſur la circonférence, à commencer d'un même point quelconque A, & de même part, le côté AC du triangle équilatéral (n°. 187), & le côté du pentagone régulier (n°. 370), ſucceſſivement de A en B, & de B en D.

La différence DC de l'arc ABC de 120 degrés, & de l'arc ABD de 144, ſera de 24 degrés, & ſa corde ſera le côté du quindécagone régulier inſcrit au cercle X.

REMARQUE.

372. De l'inſcription du quindécagone régulier dans le cercle, on déduit la maniere de diviſer la circonférence du cercle dans tous ſes degrés, c'eſt-à-dire, la maniere de déterminer l'arc d'un degré.

Car l'arc de 24 degrés étant déterminé par la ſolution du problême précédent, en diviſant cet arc en deux également (n°. 164), chacune de ſes parties ſera un arc de 12 degrés, diviſant cet arc de 12 degrés en deux également, on aura l'arc de 6 degrés; diviſant cet arc de 6 degrés en deux également, on aura l'arc de 3 degrés; diviſant par le tâtonnement avec le compas, l'arc de trois degrés en trois parties

égales, chacune de ces dernieres parties ſera un arc d'un degré.

PROBLÊME VI.

373. *Trouver une moyenne proportionnelle entre deux droites* mn, pq *données.*

SOLUTION.

184. On ſait (n°. 314) que ſi d'un même point de la circonférence du cercle, on mene une ordonnée à un diametre quelconque du cercle, & une corde à l'extrêmité du diametre, l'ordonnée ſera moyenne proportionnelle entre les abſciſſes du diametre, & la corde ſera moyenne proportionnelle entre le diametre & l'abſciſſe correſpondante à cette corde.

Ainſi, 1°. ſi l'on veut que la moyenne proportionnelle cherchée ſoit une ordonnée, ayant tiré une droite AX indéfinie, on prendra ſur cette ligne ſucceſſivement les parties AB, BC égales aux deux lignes droites *mn*, *pq* chacune à chacune; ſur la ſomme AC de ces deux lignes comme diametre, on décrira une demi-circonférence; enfin au point B de réunion de ces mêmes lignes, on élevera l'ordonnée BD qui ſera la moyenne proportionnelle cherchée.

Car puiſque (n°. 314) $\therefore$ AB : BD : BC,
en ſubſtituant *mn* & *pq* à AB & BC,
on aura . . . . . $\therefore$ *mn* : BD : *pq*.

185. 2°. Si on veut que la moyenne proportionnelle cherchée ſoit une corde, ayant tiré une droite AX indéfinie, on prendra ſur cette ligne indéfinie, à commencer du même point A, une droite AC égale à la plus grande *mn* des deux lignes données, & une partie AB égale à la plus petite *pq*, on décrira ſur AC comme diametre une demi-circonférence; on élevera au point B l'ordonnée BD; enfin on menera

la corde AD qui ſera la moyenne proportionnelle cherchée.

Car puiſque (n°. 314) . . ∴ AC : AD : AB, en ſubſtituant *mn* & *pq* à AC & AB,

on aura . . . . . ∴ *mn* : AD : *pq*.

Suite des problêmes relatifs aux lignes conſidérées dans le cercle.

LE NIVELLEMENT.

DÉFINITIONS.

374. Le *nivellement* conſiſte à trouver ſi deux points pris ſur la ſurface de la terre, ſont à égale diſtance de ſon centre, ou de combien l'un eſt plus éloigné ou plus proche de ce centre que l'autre : on emploie le nivellement principalement pour la conduite des eaux, pour rendre les rivieres navigables, pour ſécher les marais, &c.

375. On dit que deux points *ſont de niveau* lorſqu'ils ſont à égale diſtance du centre de la terre.

376. On appelle ligne de *vrai niveau* celle dont tous les points ſont à égale diſtance du centre de la terre ; telle eſt en ſuppoſant la terre exactement ſphérique, la portion AB de ſa circonférence. *Fig.* 1

377. On nomme ligne de *niveau apparent* une ligne horizontale, c'eſt-à-dire, une ligne tangente à la courbure de la terre, & par conſéquent (n°. 115) perpendiculaire au rayon de la terre : telle eſt la droite AC, ou AD perpendiculaire au rayon OA. *Fig.* 1

378. Enfin on nomme *différence du niveau vrai au niveau apparent*, le prolongement du rayon de la terre compris entre les extrêmités de ces deux niveaux ; tel eſt pour le niveau apparent AC, & le niveau vrai correſpondant AB, le prolongement BC du rayon OB. *Fig.* 1

La différence BC du niveau apparent AC au niveau vrai correſpondant AB, eſt donc la quantité dont l'extrêmité C du niveau apparent AC eſt plus éloigné du centre de la terre que l'extrêmité correſpondante B du niveau vrai correſpondant AB.

Principe du Nivellement.

379. Le nivellement, ou l'art de déterminer la poſition reſpective de deux points à l'égard du centre de la terre, conſiſte à rapporter ces deux points à une ligne horizontale, & à tenir compte de la différence du niveau apparent au niveau vrai; c'eſt-à-dire, qu'il faut d'abord examiner de combien l'un des deux points qu'il faut niveller, eſt plus éloigné que l'autre de la ligne horizontale, & enſuite retrancher de la différence des diſtances à la ligne horizontale, la différence du niveau vrai au niveau apparent; la nouvelle différence qui viendra ſera la quantité dont l'un des points eſt plus proche que l'autre du centre de la terre.

Pour rendre ceci ſenſible, imaginons qu'à deux points M, N, inégalement éloignés du centre de la terre, on ait planté deux jalons MQ, NC perpendi-
189. culaires à l'horizon, & concevons au point Q du jalon MQ une perpendiculaire QC ſur ce jalon MQ, & terminée à la rencontre de l'autre jalon NC, cette perpendiculaire ſera (n°. 377) une ligne horizontale. Cela poſé,

Il eſt évident qu'en rapportant les points M, N à l'horizontale QC, c'eſt-à-dire, en meſurant les diſtances MQ, NC de ces points à cette horizontale, & en retranchant la moindre diſtance MQ de la plus grande NC; la différence NC — MQ de ces diſtances ſeroit évidemment la quantité dont le point N, le plus éloigné de l'horizontal, ſeroit plus proche du centre de la terre que le point M, ſi les points Q,

& [illegible]de l'horizontal étoient également éloignés du cen[illegible]de la terre ; mais on obſervera qu'au niveau apparent QC répond un niveau vrai QX ; que dans ce niveau apparent QC le point C eſt plus éloigné du centre de la terre que le point correſpondant X du niveau vrai, & par conſéquent plus éloigné que le point Q de la différence CX des niveaux.

Donc la différence NC — MQ des diſtances des points M, N à l'horizontale QC, ne marquera la quantité dont le point N, plus éloigné de l'horizontale, eſt plus proche du centre de la terre ; que lorſque de cette différence on aura retranché la différence CX du niveau vrai QX au niveau apparent QC ; ce qui donnera NC — MQ — CX pour la quantité dont le point N eſt plus proche du centre de la terre que le point M.

Où l'on voit que le nivellement conſiſte à rapporter à une ligne horizontale les points qu'il faut niveller, & enſuite à tenir compte de la différence des niveaux ; par conſéquent le nivellement ſuppoſe en général :

1°. Que l'on ſait déterminer la différence du niveau vrai au niveau apparent.

2°. Des inſtrumens propres à donner des lignes horizontales.

Maniere de déterminer la différence du niveau vrai au niveau apparent.

PROBLÊME.

380. *Connoiſſant la longueur d'un niveau apparent quelconque* AC, *& ſuppoſant que le diametre de la terre eſt de* 6, 538, 594 *toiſes, déterminer la différence* BC *du niveau vrai* AB *au niveau apparent* AC. *Fig.* 186

SOLUTION.

On considérera que la différence BC que l'on propose de déterminer, est la partie extérieure d'une sécante CF qui passe par le centre de la terre, & que le niveau apparent AC est une tangente menée du même point C à un grand cercle X de la terre; par conséquent (n°. 319) la différence BC est troisieme proportionnelle à la sécante CF, & à la tangente ou au niveau apparent AC; & comme la partie extérieure BC est presque incomparable avec le diametre BF de la terre, de façon que la sécante CF ne differe pas sensiblement du diametre BF de la terre, on pourra dire que la différence BC des niveaux AC, AB, est troisieme proportionnelle au diametre BF de la terre, qui est une grandeur connue, & au niveau apparent AC dont la longueur est aussi donnée.

C'est-à-dire, que l'on a . . $\therefore$ BF : AC : BC.

D'où l'on tire (n°. 253) . . . $BF \times BC = \overline{AC}^2$.

Et en dégageant l'inconnue BC, c'est-à-dire (*axiome* 11), en divisant chaque membre par la quantité BF . . . . . $BC = \frac{\overline{AC}^2}{BF}$.

Ce qui montre que la différence du niveau vrai au niveau apparent est égale au quarré du niveau apparent divisé par le diametre de la terre.

CONSÉQUENCES.

§. 186. 381. Premiere. *Les différences des niveaux apparens aux niveaux vrais correspondans sont entr'elles comme les quarrés des niveaux apparens.*

Car pour les niveaux correspondans AB, AC, on vient de trouver . . . . . $BC = \frac{\overline{AC}^2}{BF}$.

On a de même pour les niveaux correſpondans

AD, ABE . . . . . $ED = \frac{\overline{AD}^2}{EH \text{ ou } BF}$.

Donc . . . . . $BC : ED :: \frac{\overline{AC}^2}{BF} : \frac{\overline{AD}^2}{BF}$.

Mais (n°. 247) $\frac{\overline{AC}^2}{BF} : \frac{\overline{AD}^2}{BF} :: \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$.

Donc . . . . . $BC : ED :: \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2$.

C'eſt-à-dire, que les différences BC, ED des niveaux apparens aux niveaux vrais correſpondans ſont entr'elles comme les quarrés des niveaux apparens AC, AD.

382. Seconde. *Par conſéquent lorſque l'on connoîtra la différence* BC *d'un niveau apparent quelconque* AC *au niveau vrai correſpondant* AB, *on pourra par une ſeule regle de trois déterminer la différence* ED *pour tout autre niveau apparent* AD *dont la longueur ſera déterminée.* Fig.

Si on ſuppoſe, par exemple, le niveau apparent AC de 200 toiſes, ſa différence BC au niveau vrai AB de 5 lignes, & le niveau apparent AD de 500 toiſes, on pourra faire cette proportion dont les trois premiers termes ſont connus, & dont le quatrieme terme ſera la différence DE du niveau apparent AD au niveau vrai ABE, $\begin{cases} \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 :: BC : x = DE \\ 40000 : 250000 :: 5 \text{ lignes} : x = \end{cases}$

Faiſant le produit des moyens, & diviſant par le premier extrême, on trouve 2 pouces 9 lignes pour la différence DE cherchée.

C'eſt par cette méthode que l'on a calculé la Table ſuivante.

TABLE

383. *Pour la différence des niveaux vrais aux niveaux apparens correſpondans depuis* 50 *toiſes juſqu'à* 4000.

Niveaux apparens.	différences en pieds.	pouces.	lignes.
50	0	0	0 $\frac{1}{3}$
100	0	0	1 $\frac{1}{3}$
200	0	0	5
300	0	0	11 $\frac{2}{3}$
400	0	1	9
500	0	2	9
600	0	3	11
700	0	5	4 $\frac{1}{3}$
800	0	6	11 $\frac{1}{3}$
900	0	8	9 $\frac{1}{3}$
1000	0	11	
1500	2	0	9
2000	3	8	0
2500	5	8	8 $\frac{1}{2}$
3000	8	3	0
4000	14	8	0

384. Cette Table fait connoître que lorſque le niveau apparent ne paſſe pas 100 ou 110 toiſes, la différence au vrai niveau correſpondant eſt inſenſible, & l'on en conçoit aiſément la raiſon : la courbure d'un cercle ou d'une ſphere étant d'autant plus petite que le diametre de ce cercle ou de cette ſphere eſt plus grand, il eſt évident que la courbure de la terre doit être inſenſible dans une diſtance qui n'excede pas 100 ou 110 toiſes, c'eſt-à-dire, qu'une tangente ou un niveau apparent qui n'excede pas 100 ou 110 toiſes, doit être confondu avec l'arc correſpondant de la terre, ou avec la ligne du vrai niveau.

conſéquent le nivellement de deux points dont
ance n'excédera pas 100 ou 110 toiſes, n'aura
ſoin de la correction des niveaux. (*a*).

DES NIVEAUX.

. On nomme *niveaux* les inſtrumens propres à
r des lignes horizontales.
ſſieurs de la Hire, Romer, Hughens, Picard,
nné différentes ſortes de niveaux; on en trouve
ſcriptions dans le Traité du Nivellement que le
r a publié. On ſe bornera à donner la conſtruc-
& le principe du niveau le plus en uſage dans
itecture militaire & civile, qui eſt le *niveau*

. Le *niveau d'eau* eſt compoſé d'un tuyau rond *Fig.* 188.
le cuivre ou de fer blanc, d'environ 3 ou 4
de longueur ſur 18 ou 20 lignes de diametre;
ecourbé à angles droits à ſes extrêmités A, B,
ıs ces parties recourbées ſont maſtiqués deux
: de verre C, D.
ınd on veut s'en ſervir on le monte ſur un
& l'on verſe de l'eau ordinaire ou colorée dans
:s tubes du verre, juſqu'à ce qu'elle monte dans
, & l'inſtrument eſt préparé.
›ropriété qu'ont les liqueurs de ſe mettre tou-
le niveau lorſqu'elles ſont contenues dans un
vaſe, ou dans des vaſes qui ſe communiquent,
›rincipe qui rend le niveau d'eau propre à dé-
ıer les lignes horizontales ou perpendiculaires
›n de la terre.
effet, l'eau contenue dans chaque tube G, D

On dit que l'on corrige les niveaux lorſque l'on tient
de la différence du niveau vrai au niveau apparent cor-
ant.

rton juſqu'à ce que le rayon viſuel rencontre la ligne qui ſépare la partie noircie de la partie blanche; ors je lui fais ſigne de fixer le carton, après quoi il eſure la hauteur CN; je meſure de mon côté la auteur QM.

Si les deux hauteurs QM, CN ſont égales, les oints M, N ſeront à égale diſtance du centre de la erre; ſi elles ſont inégales, je retranche l'une de l'autre, & la différence CN — QM ſera la quantité dont e point le plus éloigné N de l'horizontale eſt plus roche du centre de la terre que l'autre point M (n°. 379), ſans qu'il ſoit néceſſaire de tenir compte de a différence du niveau apparent QC au niveau vrai, arce que l'horizontal QC n'excede pas, par la ſuppoition, 100 ou 110 toiſes.

On appelle ce nivellement, *nivellement ſimple*, parce u'il ne demande qu'un ſeul coup de niveau.

EXEMPLE II.

388. *Niveller deux points* M, N, *dont la diſtance eſt au-deſſus de* 100 *ou* 110 *toiſes, ſans excéder* 200. Fig. 19

OPÉRATIONS.

Je partage cette diſtance en deux parties MX, XN à-peu-près égales; & plaçant le niveau au point X, je viſe d'abord du point A au point C par le point B; & enſuite du point B au point Q par le point A.

La différence CN — QM des points M, N à l'horizontale, fera encore connoître la quantité dont le oint le plus éloigné N de l'horizontale eſt plus proe du centre de la terre.

Cette façon de niveller en plaçant le niveau au mi- de la diſtance entre les points M, N, ſe nomme *llement moyen*.

On remarquera qu'outre que ce nivellement di-

minue les opérations, il donne toujours des points Q & C de vrai niveau; c'eſt-à-dire, également éloignés du centre de la terre, quelle que ſoit la diſtance des termes M, N du nivellement.

Pour s'en aſſurer, il ſuffit de jetter les yeux ſur la
. 187. figure 187, dans laquelle le niveau étant placé au milieu X des deux termes E, F du nivellement, les niveaux apparens ou les lignes horizontales AD, AC ſont égales, & forment avec le rayon OA auquel elles ſont perpendiculaires (n°. 377), les triangles rectangles OAD, OAC entiérement égaux (n°. 58); ce qui donne OD = OC, c'eſt-à-dire, que les extrêmités D, C des lignes horizontales AD, AC ſont, dans le nivellement moyen, à égale diſtance du centre de la terre; par conſéquent dans ce nivellement, il n'y a nul égard à faire à la différence des niveaux, quelle que ſoit d'ailleurs la longueur des niveaux apparens AD, AC.

EXEMPLE III.

. 191. 389. *Niveller deux points* M, N *dont la diſtance eſt au-deſſus de* 200 *toiſes, & que l'on ſuppoſe ſéparés par un terrein qui va tout en montant, ou tout en deſcendant.*

OPÉRATIONS.

On ſuppoſera les points M, N éloignés, par exemple, de 400 toiſes; comme cette diſtance eſt trop grande pour qu'un ſeul coup de niveau puiſſe porter du point M au point N; & que le nivellement moyen, en plaçant le niveau au milieu de la diſtance MN, ſeroit encore d'une trop grande étendue pour être fait exactement; je coupe l'intervalle des points M, N en deux parties MP, PN, dont chacun ſoit à-peu-près de 200 toiſes.

Mettant

Mettant le niveau au milieu Z de la diviſion MP, ɜ viſe du point B par le point A au point O, & du oint A par le point B au point R : le ſecond qui fait opération avec moi, meſure la hauteur OM, & ıarque par un trait ſur la double toiſe PR le point R.

Le niveau étant tranſporté au milieu X de la divi- on PN, je viſe du point B par le point A au point , & du point A par le point B au point C : celui qui ait l'opération avec moi meſure l'abaiſſement RS de à nouvelle horizontale SC ſous la précédente OR, c l'abaiſſement CN du point N au-deſſous de la nou- elle horizontale SC.

Cela poſé, ſi l'on s'imagine que l'on eſt allé du oint M où l'on a commencé le nivellement, au oint N où on l'a fini, en ſuivant les horizontales OR, SC.

Il eſt évident 1°. qu'il a fallu monter d'abord de la uantité OM pour aller du point M à l'horizontale OR : pour aller enſuite de l'horizontale OR à l'ho- izontale SC, il a fallu deſcendre de la quantité RS ; nfin pour aller de l'horizontale SC au point N, il a ncore fallu deſcendre de la quantité CN ; c'eſt pour- uoi on a regardé, & l'on pourra toujours regarder a diſtance du point M où l'on commence le nivelle- ent à la premiere horizontale comme une éléva- ion, & comme des abaiſſemens ou des quantités ontraires, les quantités dont les nouvelles horizon- ales ſont au-deſſous des précédentes, & auſſi la quan- ité dont le ſecond terme N du nivellement eſt au- eſſous de la derniere horizontale.

Il eſt évident 2°. que ſi l'élévation MO eſt moin- re que la ſomme RS + CN des abaiſſemens, la dif- érence RS + CN — MO ſera la quantité dont on ura plus deſcendu que monté, pour aller du point M u point N ; c'eſt-à-dire, la quantité dont le point

M eſt plus haut ou plus éloigné du centre de que le point N.

De même que ſi l'élévation MO étoit plus que la ſomme RS + CN des abaiſſemens, l rence MO — RS — CN ſeroit la quantité point M ſeroit plus proche du centre de la te le point N.

REMARQUE.

191. En commençant l'opération par le point N, de ce que l'on vient de dire, qu'il faudroit re comme des élévations la quantité CN dont l miere horizontale SC eſt au-deſſus du premi me N du nivellement, & la quantité RS dont l velle horizontale OR eſt au-deſſus de la préc SC, & comme un abaiſſement, la quantité d ſecond terme M du nivellement eſt au-deſſous derniere horizontale OR.

Alors en ſuppoſant CN + RS > MO, la rence CN + RS — MO marqueroit la quantit le point N eſt plus bas; c'eſt-à-dire, plus proc centre de la terre que le point M.

De même qu'en ſuppoſant CN + RS < M différence MO — CN — RS marqueroit la q dont le point N ſeroit plus haut ou plus éloig centre de la terre que le point M.

EXEMPLE IV.

390. *Niveller deux points* M, N, *entre leſq*
192. *ſe trouve des hauteurs & des deſcentes.*

Ce nivellement ne differe du précédent qu que dans le précédent il n'y a qu'une élévati pluſieurs abaiſſemens, ou pluſieurs élévations ſeul abaiſſement, ſelon que l'on commence le ni ment par le terme M le plus élevé, ou par le ter

Au contraire, dans le nivellement actuellement ›poſé, il y aura pluſieurs élévations & pluſieurs ıiſſemens que l'on diſtinguera aiſément, en prenant ıjours pour élévations d'abord la quantité dont le me où l'on commence le nivellement eſt éloigné la premiere horizontale, & enſuite la quantité dont e nouvelle horizontale eſt au-deſſus de la précéente, & en prenant toujours pour abaiſſement d'abord la quantité dont une nouvelle horizontale eſt auſſous de la précédente, & enſuite la quantité dont ſecond terme du nivellement eſt au-deſſous de la rniere horizontale.

Lorſque l'on aura meſuré chaque élévation & chaıe abaiſſement, & que l'on aura fait deux colonnes, premiere pour les élévations, la ſeconde pour les baiſſemens, la différence de ces deux colonnes fera onnoître la poſition reſpective des deux points M, I à l'égard du centre de la terre.

Voici les opérations.

OPÉRATIONS.

Ayant partagé la diſtance entre les points M, N en pluſieurs parties aux points Q, P les plus commodes pour opérer : *Fig. 192.*

Je place le niveau en V, & ayant tiré le rayon viſuel horizontal EF, je fais marquer par un trait de rayon le point E ſur le jalon QE qui reſtera pour la ſeconde opération, & meſurer l'élévation FM de la premiere horizontale EF au-deſſus du point M; j'écris cette élévation dans la colonne des élévations.

Je place le niveau en Z, & ayant tiré le rayon viuel horizontal OS, je fais marquer le point S ſur e jalon PR qui reſtera pour la troiſieme opération, c meſurer l'abaiſſement OE de la nouvelle ho-

rizontale OS ſous la précédente FE; j'écris cet a
ſement OE dans la colonne des abaiſſemens.

Je place le niveau en X, & ayant tiré le rayo
ſuel RC, je fais meſurer RS qui eſt l'élévation
nouvelle horizontale RC au-deſſus de la précéd
OS; je fais de même meſurer CN qui eſt l'aba
ment du ſecond terme N du nivellement au-de
de la derniere horizontale RC; & j'écris RS dar
colonne des élévations, & CN dans la colonne
abaiſſemens.

Il réſulte de ces opérations deux élévations F
RS, & deux abaiſſemens EO, CN.

Je fais la ſomme FM + RS des élévations,
ſomme EO + CN des abaiſſemens.

Alors en ſuppoſant la ſomme FM + RS des
vations plus grandes que la ſomme EO + CN
abaiſſemens, la différence FM + RS — EO —
ſera la quantité dont on aura plus monté que
cendu pour aller du point M au point N par le mo
des lignes horizontales; cette différence ſera don
quantité dont le point M eſt plus proche du ce
de la terre que le point N.

En ſuppoſant la ſomme FM + RS des élévati
moindre que la ſomme EO + CN des abaiſſeme
la différence EO + CN — FM — RS, ſera la q
tité dont on aura plus deſcendu que monté pour a
du point M au point N, en ſuivant les lignes h
zontales; & par conſéquent cette différence ſer
quantité dont le point M eſt plus éloigné du ce
de la terre que le point N.

SECTION IV.

Application des propriétés du cercle, relatives à la Trigonométrie.

LA TRIGONOMÉTRIE.

391. *LA Trigonométrie* eſt en général l'art de calculer les triangles.

C'eſt-à-dire, l'art de découvrir par le calcul les côtés & les angles inconnus d'un triangle, lorſque l'on y connoît autant d'angles & de côtés qu'il eſt néceſſaire pour déterminer ce triangle.

Or un triangle quelconque ABC eſt déterminé lorſque l'on en donne *un côté quelconque; par exemple*, AB, *& les angles* A, B *ſur ce côté.* Fig. 194.

Deux côtés AC, CB, *l'angle* A *oppoſé à l'un* BC *des côtés donnés, avec l'eſpece de l'angle oppoſé à l'autre côté donné.* Fig. 195.

Deux côtés AB, BC *avec l'angle compris entre ces côtés.* Fig. 197.

Les trois côtés AB, BC, AC. *Fig.* 196.

Le triangle rectangle quelconque ABC, *Fig.* 193, eſt déterminé lorſque l'on en donne :

L'hypothénuſe AC, *& l'un des angles aigus* A *ou* C.

L'un AB *des côtés de l'angle droit avec l'un des angles aigus* A, C.

L'hypothénuſe AC *& l'un* AB, *ou* BC *des côtés de l'angle droit.*

Enfin les deux côtés de l'angle droit.

La Trigonométrie conſiſtera donc à découvrir dans chacun de ces cas, ce qui reſte d'angles & de côtés. Voyons les moyens d'y parvenir.

392. Lorſque l'on a connu que dans tout tri
les côtés ſont proportionnels aux ſinus des angle
poſés, & que dans tout triangle rectangle l'un de
tés de l'angle droit étant pris pour le rayon de l'
aigu qui lui eſt adjacent, l'autre côté de l'angle
devient la tangente, & l'hypothénuſe la ſécant
cet angle; on n'a pas dû tarder à ſentir que ſi on
des nombres tout calculés pour repréſenter les
de tous les angles, d'autres nombres pour repr
ter les tangentes & les ſécantes des mêmes an
alors la réſolution ou le calcul du triangle ne ce
teroit que dans des regles de trois formées par la
paraiſon des côtés du triangle avec les ſinus o
tangentes, &c. de ſes angles.

En conſéquence de cette idée, l'une des plus l
& des plus utiles de la Géométrie, on a conſtrui
tables où l'on trouve, pour chaque angle, des n
bres qui repréſentent ſon ſinus, ſa tangente & ſ
cante. Ces tables ſont connues ſous le nom de *T*
des ſinus; on y trouve dans les pages à gauche,
chaque angle, depuis une minute juſqu'à 45 de
ſon ſinus, ſa tangente & ſa ſécante; vis-à-vis,
la page à droite, on a le ſinus, la tangente & l
cante de ſon complément.

On a fait plus: on a ajouté dans ces tables, à
du ſinus & de la tangente de chaque angle, les
rithmes de ces nombres; & à la ſuite de la tabl
ſinus, on a mis les logarithmes des nombres nat
depuis 1 juſqu'à 10000 ou 20000, afin que da
regle de trois géométrique, formée de la comp
ſon des côtés du triangle avec les ſinus ou tang
des angles du triangle, venant à ſubſtituer à la
de chaque terme ſon logarithme, la regle de trc
change en une proportion arithmétique, dan
quelle, au lieu de multiplier & de diviſer, on a

l'on ſouſtrait pour avoir le terme inconnu, qui ſera logarithme du terme inconnu de la proportion géométrique; cet inconnu de la proportion géométrique viendra évidemment connu par le moyen de ſon garithme : car prenant dans les tables le nombre qui pond à ce logarithme ou au logarithme qui en approche le plus, ce nombre ſera le terme cherché; ſt-à-dire, un côté du triangle, ou le ſinus, ou la ngente d'un angle.

Comme les logarithmes que l'on trouve dans les tables des ſinus ont été conſtruits ſur les propriétés déjà nnues des logarithmes, on s'appliquera ſeulement à faire connoître la méthode dont on a pu calculer s ſinus, les tangentes & les ſécantes des différens gles; on donnera enſuite la réſolution des triangles ctangles & non rectangles; enfin on appliquera ces gles générales à la meſure des lignes inacceſſibles ou nſidérées comme telles.

ARTICLE I.

Conſtruction des Sinus, Tangentes & Sécantes.

CONSTRUCTION DES SINUS.

393. Les angles obtus ayant les mêmes ſinus que angles aigus leurs ſupplémens (n°. 329), il eſt évint qu'il a ſuffi de calculer les ſinus des angles deis le plus petit, par exemple, depuis une minute qu'à 90 degrés.

Voici en général la maniere dont on a fait ce calcul. On a ſuppoſé le rayon de tout cercle, c'eſt-à-dire, ſinus de l'angle droit, diviſé en un nombre conſtant parties égales; après quoi conſidérant chaque autre us avec le rayon dans des triangles rectangles ou ns différentes analogies, on a déterminé par des exctions de racines ou par des diviſions, le nombre

des parties égales du rayon que chaque autre ſinus renferme ; & l'on obſervera que, comme pour pouvoir négliger les reſtes des diviſions & des extractions de racines, il falloit que le rayon fût diviſé en un grand nombre de parties égales, on l'a ſuppoſé égal à 10 000 000 dans les tables ordinaires.

On va voir en particulier que d'après les numéros 333, 334, 335, 336, 337, 338, on pourroit déterminer en parties égales du rayon ou du ſinus de l'angle droit, les valeurs des ſinus des autres angles.

PROBLÊME.

394. *Suppoſant le rayon de tout cercle, c'eſt-à-dire, le ſinus de l'angle droit, repréſenté par* 10 000 000, *trouver en parties égales de ce rayon, les valeurs des ſinus de tous les autres angles depuis une minute juſqu'à* 90 *degrés.*

SOLUTION.

1°. On ſait que (n°. 333) le ſinus de l'angle de 30 degrés eſt la moitié du rayon ; que par conſéquent il eſt repréſenté par 5 000 000 : or ce ſinus étant connu, on déterminera par le n°. 334 ſon coſinus & ſon ſinus verſe ; & enſuite par le n°. 335, le ſinus de l'angle de 15 degrés, moitié de l'angle de 30, on déterminera par la même méthode ſucceſſivement, les ſinus des angles continuellement ſous-doubles, c'eſt-à-dire, l'angle de 7 degrés & $\frac{1}{2}$, de 3 degrés $\frac{3}{4}$, de 1 degré 52′, 30″, & ainſi de ſuite juſqu'au ſinus de l'angle de 52″, 44‴, 3′′, 45′ qui eſt le douzieme terme de la progreſſion ſous-double, en la commençant par l'angle de 30 degrés.

Comme le ſinus de cet angle 52″, 44‴, 3′′, 45′ eſt confondu avec ſon arc, qu'il en eſt de même de tous les ſinus des angles qui n'excedent pas une mi-

& que les ſinus qui ne different pas de leurs
ont proportionnels à ces arcs, il eſt évident que
t cette proportion, l'arc de 52″, 44‴, 3ᵛ, 45ᵛ
on ſinus connu, comme l'arc de une minute eſt

quatrieme terme ſera la valeur du ſinus de l'an-
une minute.

Lorſque l'on aura ainſi trouvé le ſinus de l'an-
une minute, on déterminera par le n°. 335 le
le l'angle double 2′; puis par le n°. 336 le ſinus
ıgle de 3′ égal à la ſomme des angles de 1′ &
on déterminera enſuite par les mêmes métho-
s ſinus des angles de 4, 5, 6, &c. minutes,
ı 60′ ou 1 degré; & enſuite les ſinus des angles
1 degré juſqu'à 30 degrés.

Lorſque l'on aura les ſinus des angles depuis
inute juſqu'à 30 degrés, on pourra, par le nu-
337, déterminer les ſinus des angles depuis 30
60 degrés.

exemple, pour avoir le ſinus de l'angle de 31
, on ajoutera enſemble le ſinus trouvé de l'arc
degrés, & le produit du ſinus trouvé de 1 de-
ıltiplié par $\sqrt{3}$.

r avoir le ſinus de l'angle de 32 degrés, on
a au ſinus de l'arc de 28 degrés, le produit du
e 2 degrés multiplié par $\sqrt{3}$; & ainſi de ſuite
u ſinus de l'angle de 60 degrés, lequel eſt égal
on.

Enfin les ſinus des angles depuis une minute
60 degrés étant trouvés, en employant le nu-
338, on trouvera les ſinus des angles depuis 60
juſqu'à 90 degrés.

exemple, on aura le ſinus de 61 degrés en ajou-
ıſemble le ſinus de l'angle de 59 degrés, & de
e 1 degré; on aura celui de 62 degrés en ajou-

tant enſemble le ſinus de l'angle de 58 degrés, & lui de 2 ; & ainſi de ſuite.

REMARQUE.

Rectification de la circonférence du cercle, déduite des ſinus.

395. Le calcul des ſinus des arcs continuellement ſous-doubles de 30 degrés, donne un moyen d'approcher auſſi près que l'on voudra du rapport exact du diametre à la circonférence, lequel juſqu'à préſent on n'a pu déterminer.

Suppoſons en effet qu'ayant pouſſé la diviſion de l'arc de 30 degrés continuellement par 2, juſqu'à ce que l'on ſoit arrivé à un arc qui differe très-peu de ſon ſinus ; & qu'ayant pris, en parties égales du rayon = 10000000, la valeur de ce ſinus, on ait répété cette valeur autant de fois que l'arc de ce ſinus eſt contenu dans la demi-circonférence, il eſt évident que le produit étant comparé avec le rayon = 10 000 000 donnera un rapport approché de la demi-circonférence au rayon, ou de la circonférence au diametre ; & ce rapport ſera d'autant moins éloigné du rapport exact, que l'on aura pouſſé plus loin la diviſion ſucceſſive de l'arc de 30 degrés par 2 ; c'eſt-à-dire, plus l'arc dont on aura calculé le ſinus ſera plus petit, & différera par conſéquent moins de ſon ſinus.

Par exemple, en diviſant l'arc de 30 degrés ſept fois de ſuite par 2, on arrive à un arc de $1''', 38\ 52^{IV}, 37^{V}, 1^{VI}, 52^{VII}, 30^{VIII}$, qui n'eſt plus grand que ſon ſinus que d'une très-petite quantité, & qui eſt contenu dans l'arc de 30 degrés 65536 fois, (c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il eſt déſigné par le produit 65536 des diviſeurs des 16 diviſions dont chacun eſt égal à 2), eſt contenu 6 fois 65536 fois, ou 393216

fois dans la demi-circonférence qui contient ſix fois l'arc de 30 degrés.

Prenant le ſinus de cet arc en parties égales du rayon = 10000000, & multipliant ce ſinus par 393216, il vient le produit 31415926, moindre, dans la rigueur, que la demi-circonférence, dont le rayon ſeroit 10000000, mais qui peut ſans erreur ſenſible, être pris pour cette demi-circonférence; de façon que l'on pourra, ſans erreur ſenſible, repréſenter le rapport du diametre à la circonférence par celui de 10000000 à 31415926.

De ce rapport on a formé, en prenant ſeulement les trois premiers chiffres de chaque terme, celui de 100 à 314, évidemment moins exact que le précédent.

Un rapport plus exact que celui de 100 à 314, & preſque auſſi exact que celui de 10000000 à 31415926, eſt celui de 113 à 355 trouvé par Adrien Métius, Hollandois.

On préfere à tous ces rapports, dans la pratique, celui de 7 à 12; Archimede en eſt l'auteur. Ayant ſuppoſé le diametre du cercle repréſenté par 7, il a trouvé que la circonférence ſeroit repréſentée par un nombre compris entre 21 & 22, mais beaucoup plus proche de 22 que de 21.

Conſtruction des Tangentes & Sécantes.

PROBLÊME.

396. *Suppoſant le rayon* = 10000000 *parties, & étant données en parties du rayon les valeurs du ſinus* SC *& du coſinus* SG *de l'angle quelconque* AOT, *trouver les valeurs de la tangente* AT *& de la ſécante* OT *de ce même angle.* Fig. 14

SOLUTION.

Le ſinus SC & la tangente AT étant perpendicu-

laires ſur le rayon OA (n°. 324) 327), & terminé par la ſécante OT de cet angle, les triangles OCS OAT ſeront évidemment ſemblables (n°. 271).

Ainſi on aura $\begin{cases} 1°.\ OC = SG : SC :: OA : AT. \\ 2°.\ OC = SG : OS = OA :: OA : OT \end{cases}$

Dans chacune de ces proportions les trois premie termes étant connus, par la ſuppoſition, on déduira

De la premiere, que la tangente AT d'un angl quelconque eſt égal au rayon multiplié par le ſinus c cet angle, & diviſé par le ſinus du complément.

De la ſeconde, que la ſécante OT d'un angle que conque eſt égale au quarré du rayon diviſé par le ſinu du complément.

REMARQUE.

397. L'on ſait que dans les différens cercles l ſinus des angles de même nombre de degrés ſont en tr'eux comme les rayons de ces cercles, & qu'il en e de même des tangentes & des ſécantes de ces angl (n°. 345); ainſi puiſque l'on a ſuppoſé le rayon c tout cercle, ou le ſinus de l'angle droit, diviſé en u nombre conſtant de parties égales, c'eſt-à-dire, qu'o l'a toujours repréſenté par 10 000 000, il eſt évi dent que les angles de même valeur, c'eſt-à-dire d'un même nombre de degrés, auront leurs ſinus r préſentés par le même nombre, quelle que ſoit d'ai leurs la longueur de leurs côtés; la tangente des a gles d'une même valeur, quoique différente ſelon longueur des rayons de ces angles, ſera auſſi repréſe tée par le même nombre de parties égales, & il en ſe de même des ſécantes.

Il faudra donc conſidérer les nombres que l'on calculés pour repréſenter les ſinus, les tangentes & l ſécantes des différens angles, non comme les valeu abſolues de ces lignes, mais comme des quantités q

en expriment les rapports, c'eſt-à-dire, des quantités proportionnelles aux vrais ſinus, aux vraies tangentes & aux vraies ſécantes, qui forment par conſéquent avec les côtés du triangle les mêmes proportions que forment avec ces côtés les vrais ſinus, les vraies tangentes & les vraies ſécantes.

ARTICLE II.

Réſolution des Triangles.

398. On eſt déja prévenu que la réſolution du triangle ſe fait par le moyen des regles de trois que l'on déduit des proportions que forment les côtés du triangle avec les ſinus ou les tangentes des angles de ce triangle.

Rien n'étant plus aiſé, lorſque la regle de trois eſt formée, que de ſubſtituer aux trois termes connus leurs logarithmes, pour déterminer enſuite par l'addition & la ſouſtraction le logarithme du terme cherché, on ſe bornera à montrer les regles de trois ou proportions géométriques qui donnent la réſolution des triangles.

On avertira ici, pour toute la ſuite, que lorſque la regle de trois aura fait connoître la valeur du ſinus ou de la tangente d'un angle cherché, ou les logarithmes de ces nombres, il ne s'agira plus que de chercher dans les tables l'angle qui répond au ſinus ou à la tangente trouvés, ou au logarithme trouvé du ſinus & de la tangente.

Réſolution des Triangles rectangles.

On renfermera la réſolution des triangles rectangles dans les trois problêmes qui ſuivent, dans leſquels on ſuppoſera ce qui détermine le triangle rectan[illegible] & l'on demandera à connoître le reſte.

les deux proportions ſuivantes, dans leſquelles les termes cherchés ſont chacun quatriemes proportionnelles à trois termes connus.

1°. R : T. A :: AB : BC { C'eſt-à-dire, pour le premier cas du problême, le rayon de l'angle A = 10 000 000, eſt à la tangente de l'angle connu A dont on prendra la valeur dans les tables, comme le côté connu AB pris pour rayon, eſt au côté cherché BC devenu tangente.

2°. AB : BC :: R : T. A { C'eſt-à-dire, pour le ſecond cas du problême, le côté AB connu, eſt au côté BC que l'on ſuppoſe auſſi connu, comme le rayon de l'angle A = 10000000 eſt à la tangente cherchée de l'angle A.

PROBLÊME III.

193. 401. *Etant donnés dans un triangle rectangle quelconque* ABC, *les deux côtés* AB, BC *de l'angle droit, connoître l'hypothénuſe* AC.

SOLUTION.

On déterminera par le problême précédent (n°. 400) l'angle aigu A adjacent au côté AB; alors connoiſſant l'angle aigu A & le côté oppoſé BC, on déterminera l'hypothénuſe par le n°. 399.

Réſolution

ſolution des Triangles quelconques rectangles & non rectangles.

On propoſera dans les problêmes ſuivans tout ce ui détermine le triangle, & on demandera à conoître le reſte.

PROBLÊME I.

402. *Etant donnés dans un triangle quelconque* ACB, *Fig.* 194 *côté* AB, *& les deux angles* A, B *ſur ce côté, trouer le troiſieme angle* C, *& les deux autres côtés* AC, C.

SOLUTION.

Les deux angles A, B étant connus, on aura la vaeur du troiſieme angle C, en retranchant de 180 degrés la ſomme des deux premiers (n°. 142).

Les trois angles A, B, C étant connus avec le côté AB, on ſe rappellera que les côtés du triangle ſont ntr'eux comme les ſinus des angles oppoſés (n°. 342); & l'on conclurra que pour connoître les côtés AC, CB, il faut prendre dans les tables les ſinus des trois ngles A, B, C, & faire les deux proportions ſuivanes, dans leſquelles les côtés cherchés ſont quatriemes roportionnelles à trois termes connus.

°. S. C : AB :: S. A : BC { Le ſinus de l'angle C connu, & oppoſé au côté connu AB, eſt à ce côté oppoſé AB, comme le ſinus de l'angle A connu, & oppoſé au côté inconnu BC eſt à ce côté inconnu BC.

2°. S. C : AB :: S. B : AC { Le ſinus de l'angle C
nu, & oppoſé au côté
nu AB, eſt à ce côté
nu AB, comme le
de l'angle B connu, &
poſé au côté inconnu
eſt à ce côté inconnu

PROBLÊME II.

Fig. 195. 403. *Etant donnés dans un triangle quelconqu*
côtés AC, BC, *l'angle* A *oppoſé au côté connu*
connoître le ſinus de l'angle oppoſé à l'autre côté
AC.

SOLUTION.

Les côtés du triangle étant proportionnels aux
des angles oppoſés (n°. 342), il eſt évident qu'en
nant dans les tables le ſinus de l'angle A, on au
ſinus de l'angle oppoſé au côté AC par cette propo

BC : S. A :: AC : S. cherché { Le côté connu BC e
ſinus de l'angle A co
& oppoſé au côté
comme le côté conn
eſt au ſinus de l'angl
poſé au côté AC.

Mais l'on obſervera que le ſinus de l'angle o
au côté AC, ne fera point connoître la valeur d
angle.

Pour le démontrer, que du ſommet C comme
tre, & de l'intervalle CB comme rayon, on décri
arc BD qui coupe en un point D la baſe AB o
prolongement, & ſoit mené à ce point le rayon

Il réſultera de cette conſtruction un triangle A
dans lequel on trouve tout ce que l'on a ſuppoſé
le triangle ACB; à ſavoir, l'angle A qui eſt comn

é AC connu qui eſt commun, & le ſecond côté
onnu dans le triangle ACB égal au ſecond côté
du triangle ACD; on remarquera encore que
e D du triangle ACD, étant égal à l'angle CBD
e du triangle iſoſcele CBD, eſt ſupplément de
e ABC du triangle ACB.

ıſi les conditions du problême permettent de
lérer le côté connu AC, ou comme oppoſé à
e obtus ABC dans le triangle ACB, ou à l'an-
gu D, ſupplément de l'obtus ABC dans le trian-
CD; & comme (n°. 329) l'angle obtus ACB
nême ſinus que l'angle aigu D ſon ſupplément,
évident que le ſinus trouvé pour l'angle oppoſé
:é connu AC, appartiendra également & à l'an-
BC & à l'angle D. Ce ſinus trouvé ne ſera donc
ɔnnoître la valeur préciſe de l'angle oppoſé au
:onnu AC: le troiſieme angle du triangle qui
a être ou l'angle ACB, ou l'angle ACD, reſ-
lonc indéterminé; & par conſéquent auſſi le
ɜme côté qui pourra être ou AB ou AD: les
tions du problême ne ſuffiront donc point pour
er le triangle, parce qu'elles ne ſuffiſent pas
le déterminer: on vient de voir en effet que
ɔnditions conviennent également à chacun des
ɡles ACB, ACD.

ais on va voir que ſi aux conditions du problê-
ı ajoutoit l'eſpece de l'angle oppoſé à l'autre côté
ı AC, le triangle devenant alors déterminé, le
en ſeroit poſſible.

PROBLÊME III.

4. *Connoiſſant dans un triangle quelconque deux* Fig. 195.
AC, BC, *l'anglé* A *oppoſé au côté* BC, *& l'eſ-*
de l'angle oppoſé à l'autre côté connu AC, *con-*
ce ſecond angle & le troiſieme côté.

SOLUTION.

On cherchera, comme dans le problême préc
le ſinus de l'angle oppoſé au côté AC par la p
tion . . . . BC : S. A :: AC : S. ch
Ce ſinus étant déterminé, l'eſpece de l'ang
poſé au côté AC, fera connoître avec ſon ſinus
leur préciſe; car ce ſinus n'appartenant qu'à un
aigu d'une valeur déterminée, ou au ſuppléme
cet angle, il eſt clair que ſi on ſuppoſe que l
oppoſé au côté AC ſoit l'angle aigu D dans le
gle ACD, l'angle qui répondra, dans les tabl
ſinus trouvé, ſera la valeur de l'angle D; ſi o
poſe que l'angle oppoſé au côté AC ſoit obtus,
me l'angle ABC dans le triangle ACB, le ſuppl
de l'angle aigu qui répondra dans les tables au
trouvé, ſera la valeur de l'angle ABC.
On connoîtra donc deux angles dans le tri
ABC, ou dans le triangle ACD; d'où l'on tirera
ment la valeur du 3e en retranchant leur ſomm
180 degrés, & enſuite l'on aura la valeur du 3^e

En faiſant { le ſinus d'un angle connu & oppoſ
côté connu, eſt à ce côté oppoſé, c
le ſinus de l'angle oppoſé au côté i
nu eſt à ce côté inconnu.

PROBLÊME IV.

Fig. 197. 405. *Etant donnés dans un triangle quelconque deux côtés* AB, BC *avec l'angle* B *compris ent côtés, trouver chaque angle* A, C *ſur le troiſieme & ce troiſieme côté.*

SOLUTION.

1°. Connoiſſant l'angle B il eſt évident que peut déterminer la ſomme des angles A, C

ne côté AC (n°. 138), & par conſéquent la ſomme de ces angles. Or (*a*) la demi-ſomme gles A, C, plus la demi-différence de ces an- :ſt égale au plus grand des deux; cette même de- nme, moins la même demi-différence, eſt égale s petit de ces mêmes angles; ainſi pour avoir e angle A, C, il ſuffit de chercher leur demi- nce.

n ſait que la tangente de la demi-différence des A, C eſt quatrieme proportionnelle à la ſom- s côtés AB, BC, à leur différence, & à la tan- de la demi-ſomme des angles A, C ſur le troi- côté AC (n°. 344).

fera donc la ſomme AB+BC des côtés connus, fférence BC—AB; on prendra dans les tables la ıte de l'angle égal à la demi-ſomme des angles ; & mettant ces termes en proportion, on aura

e de trois { la ſomme AB+BC des côtés connus, eſt à leur différence BC—AB, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles A, C, eſt à la tangente de la demi-différence des mêmes angles.

moyen de laquelle on déterminera la tangente demi-différence des angles A, C, prenant dans les l'angle qui répond à cette tangente.

utant cet angle à la demi-ſomme des angles A, réſultat ſera le plus grand angle C: retranchant gle de la demi-ſomme des angles A, C, le ré- ſera le moindre angle A.

Les angles A, B, C étant connus, on déter-

(*a*) En général de deux grandeurs inégales, la plus grande ours égale à la moitié de la ſomme, plus à la demi-dif- de ces grandeurs; & l'autre eſt égale à la moitié de la moins la moitié de la différence.

minera la valeur du côté inconnu AC, par le problême premier (n°. 402), en comparant ce côté inconnu, & l'un des deux autres côtés connus, avec les ſinus des angles oppoſés à ces côtés; par exemple, en prenant le ſinus de l'angle B, & celui de l'angle C, on dira . . . . . S. C : AB :: S. B : AC.

Et en prenant le ſinus de l'angle B, & celui de l'angle A, on dira . . . S. A : BC :: S. B : AC.

PROBLÊME V.

Fig. 196. 406. *Etant donnés les trois côtés* AB, BC, AC *d'un triangle quelconque* ABC, *connoître chacun des trois angles* A, B, C.

SOLUTION.

Imaginant du ſommet B du plus grand angle une perpendiculaire BD ſur le côté oppoſé AC, on pourra faire (n°. 343)

cette proportion { AC le plus grand côté eſt à AB + BC, ſomme des deux autres AB, BC, comme BC — AB, différence de ces deux mêmes côtés, eſt à DC — AD, différence des ſegmens du côté AC, faits par la perpendiculaire BD :

Parce que les trois côtés AC, AB, BC du triangle ABC ſont connus par la ſuppoſition, les trois premiers termes de cette proportion ſeront encore évidemment connus; & l'on pourra par conſéquent déterminer le quatrieme terme, à ſavoir, la différence DC — AD des ſegmens du côté AC.

Ajoutant à la moitié de AC, ſomme des ſegmens, la moitié de leur différence, on aura le plus grand ſegment DC; en retranchant de la moitié de AC la

demi-différence de ces ſegmens, on aura le plus petit ſegment AD.

Maintenant connoiſſant dans le triangle ABD l'hypothénuſe AB qui eſt un côté du triangle ABC propoſé, & un côté AD qui eſt un ſegment que l'on vient de déterminer, ſi on fait (n°. 399) AB : R :: AD : S. ABD, on connoîtra le ſinus de l'angle ABD; prenant dans les tables des ſinus l'angle qui répond à ce ſinus, on aura l'angle ABD; & prenant le complément de l'angle ABD, on aura la valeur de l'angle A.

Connoiſſant dans le triangle CBD l'hypothénuſe BC qui eſt un côté du triangle ABC, & le côté CD qui eſt l'autre ſegment déterminé, ſi on fait BC : R :: CD : S. CBD, on trouvera le ſinus de l'angle CBD, ce qui fera connoître cet angle; & cet angle CBD étant connu, on en conclurra la valeur de l'angle C ſon complément.

On aura donc déterminé par le moyen des trois côtés du triangle ABC, la valeur de chacun de ſes angles A, B, C.

ARTICLE III.

Application des regles générales précédentes.

EXEMPLE I.

407. *Déterminer la hauteur* PB *d'un objet perpendiculaire à l'horizon, & acceſſible par ſon pied.* Fig.

On meſurera une baſe AB telle que de ſon extrémité A l'on puiſſe voir le ſommet P de la hauteur propoſée; on prendra avec le graphometre la valeur de l'angle PCD, fait par le rayon viſuel CP, avec CD égale & parallele à la baſe meſurée AB, que l'on ſuppoſe horizontale.

Ces meſures étant priſes, on aura un triangle rectangle CDP, dans lequel on connoîtra le côté C de l'angle droit D, avec l'angle aigu C adjacent à

côté ; ainſi en prenant le côté CD pour le rayon de l'angle C qui lui eſt adjacent ; on pourra (n°. 400) faire cette proportion R : T. C :: CD :: PD, dont les trois premiers termes ſont connus, & dans laquelle la hauteur PD eſt le quatrieme terme que l'on trouvera en ſubſtituant à la place des trois premiers termes R, T. C, CD leur valeur, & en faiſant la regle de trois à l'ordinaire.

Suppoſant, par exemple, { que le côté CD = 40 toiſes ou 2880 pouces ; que l'angle C eſt de 70 d.

On prendra dans les tables la valeur du rayon . . . . . = 10 000 000, celle de la tangente de 70 d. . . . = 27474774 ; & l'on fera cette regle de trois . . . . . .

... { le rayon = 10 000 000, eſt à la tangente de 70. d. = 27474774 : comme le côté CD = 40 toiſes ou 2880 pouces, eſt au côté cherché PD.

En faiſant le produit des moyens, & en diviſant par le premier extrême, on trouve que la hauteur PD = 109 toiſes 5 pieds 4 pouces & quelques lignes.

Que ſi on veut opérer par les logarithmes, on prendra dans les tables le logarithme du rayon = 10000000, celui de la tangente de 70 degrés = 10. 4389341, celui du côté CD de 2880 pouces = 3. 4593925, & l'on fera cette proportion arithmétique . . . .

. . . { le logarithme du rayon = 10. 000 000, eſt au logarithme de la tangente de 70 degrés = 10. 4389341, comme le logarithme de CD = 3. 4593925, eſt au logarithme du côté cherché PD.

Faiſant la ſomme des moyens, & retranchant de cette ſomme le premier extrême, on trouvera que le côté cherché PD a pour logarithme 3. 8983266 ;

cherchant ce logarithme dans les tables des logarithmes des nombres naturels, on trouvera que ce logarithme trouvé 3. 8983266, eſt entre le logarithme 3. 8982863 qui répond au nombre 7912, & le logarithme 3. 8983412 qui répond au nombre 7913; ainſi le côté cherché PD eſt entre 7912 & 7913 pouces : ce qui donne 109 toiſes 5 pieds 4 pouces & quelques lignes, comme on l'avoit d'abord trouvé.

Le côté PD contient donc 109 toiſes 5 pieds 4 pouces, & en ajoutant la hauteur AC du graphometre, laquelle eſt égale à DB, on aura la hauteur entiere PB cherchée.

EXEMPLE II.

408. *Déterminer la diſtance* AB *d'un point* A *où l'on eſt, à un objet* B *que l'on voit, ſans aller à ce point* B. Fig. 19

On meſurera une baſe AC telle que de ſon extrêmité C on puiſſe voir l'objet B; puis l'on prendra avec le graphometre la valeur des angles BAC, BCA faits ſur la baſe AC par les droites AB, BC que l'on imaginera menées du point B aux points A, C.

On aura par ce moyen un triangle ABC, dans lequel on connoîtra la baſe AC, & les angles A, C ſur cette baſe : on pourra donc (n°. 402) faire la proportion S. B : AC :: S. C : AB, dont les trois premiers termes ſeront connus, en mettant à leur place leur valeur, & dans laquelle on déterminera le quatrieme terme par la regle de trois.

EXEMPLE III.

409. *Déterminer la diſtance de deux points* C, D *qu'une riviere ou un obſtacle quelconque rend inacceſſible.* Fig. 2(

On meſurera d'abord une baſe AB des extrêmités de laquelle on puiſſe voir les objets C, D, & l'on marquera les extrêmités A, B par [illegible]

On prendra avec le graphometre la valeur des angles CAB, DAB faits ſur la baſe AB par des lignes droites que l'on imaginera tirées des objets C, D à l'extrêmité A de la baſe ; imaginant de même des droites DB, CB, menées des objets C, D à l'autre extrêmité B de la baſe, on meſurera les angles DBA, CBA, & l'angle CBD compris entre les côtés BC, BD du triangle CBD fait ſur la diſtance inacceſſible CD.

Toutes ces meſures étant priſes, on aura deux triangles ACB, ADB, & dans chacun d'eux la baſe AB & les deux angles ſur cette baſe ; on pourra donc par le numéro 402, déterminer dans le triangle ACB le côté BC ; & dans le triangle ADB, le côté DB.

On connoîtra par ce moyen, dans le triangle CBD, les deux côtés BC, BD autour de l'angle CBD meſuré ; & le problême ſe réduira à connoître par le n°. 405, dans le triangle CBD, les angles BCD, BDC ſur le côté inacceſſible CD, & ce côté inacceſſible.

REMARQUE.

200. 410. Lorſque l'on aura déterminé dans le triangle CBD, la valeur de l'angle CDB ou celle de l'angle BCD, il ſera fort aiſé de mener par le point donné B une droite parallele à la ligne inacceſſible CD, il ſuffira pour cela, de mener par le point B une ligne HB qui faſſe avec BD un angle HBD égal au ſupplément de l'angle CDB, ou avec BC un angle HBC égal à l'angle BCD (n°. 88).

EXEMPLE IV.

201. 411. *Déterminer la hauteur d'un objet* PC *perpendiculaire à l'horizon, & entierement inacceſſible.*

On meſurera dans un terrein libre & uni, une baſe

AB, telle que de ſes extrêmités A, B on puiſſe appercevoir le ſommet P de cette hauteur; puis plaçant le graphometre ſucceſſivement en A & en B, on prendra la valeur des angles PEF, PFE, faits ſur l'horizontale EF, par les rayons viſuels PE, PF: on meſurera de même l'angle PFG, fait par le rayon viſuel PF, & la ligne horizontale FG, dirigée à un point de la hauteur.

Ces meſures étant priſes, on aura d'abord un triangle EPF, dans lequel on connoîtra la baſe EF égale à la baſe meſurée AB, & les angles PEF, PFE ſur cette baſe, on pourra par conſéquent déterminer FP par le n°. 402.

On aura enſuite un triangle FPG, dans lequel on connoîtra le côté FP que l'on vient de déterminer, l'angle G oppoſé à ce côté, lequel angle eſt droit, parce que l'on a ſuppoſé la hauteur PC verticale, & FG horizontale, & en outre l'angle meſuré PFG; on pourra donc déterminer le côté PG par la proportion (n°. 399) R : FP :: S. PFG : PG, dans laquelle les trois premiers termes ſont connus.

Le côté PG étant déterminé, on aura la hauteur entiere PC, en ajoutant à la valeur de PG la hauteur du graphometre.

EXEMPLE V.

412. *Dans un poligone régulier* ABCDEF, *dont on connoît le nombre des côtés, étant donné le rayon oblique* AO, *connoître le côté* AB; *ou étant donné le côté* AB, *connoître le rayon oblique* AO. *Fig. 2*

On a, par la ſuppoſition, dans le triangle AOB un côté connu; à ſavoir, AO dans le premier cas, & AB dans le ſecond; & parce que le nombre des côtés du poligone régulier eſt auſſi donné, on pourra encore (n°. 177) connoître dans le trian[illegible]OB

Ce qui fera connoître la longueur de l'arc ADB.

EXEMPLE VII.

414. *Etant donnés la corde* AB *&* *la fleche* DE *d'un arc* ADB, *trouver le rayon, le nombre des degrés & minutes, & la longueur de cet arc.* Fig. 20

Comme la fleche ED n'eſt que l'une des abſciſſes du diametre perpendiculaire à la corde AB, en prolongeant cette fleche DE juſqu'à la circonférence en H, on aura (n°. 513) . . . DE : AE :: AE : EH.

Ce qui fera connoître EH, puiſque les trois premiers termes ſont connus.

EH étant connu, lui ajoutant la fleche ED, on aura le diametre, & la moitié de la ſomme connue DE + EH ſera le rayon AC; ce qu'il falloit d'abord déterminer.

Le rayon AC étant connu, de même que la corde AB, on fera la proportion AC : R :: AE : S. ACD.

Ce qui fera connoître en degrés & en minutes l'angle ACD, & ſon double ACB.

On déterminera enſuite, comme dans l'exemple précédent, la longueur de l'arc ADB (n°. 413).

REMARQUES.

I.

415. Comme les produiſans du ſecteur CADBC du cercle ſont le rayon & la moitié d'une droite égale à ſon arc, on déduira des numéros 413, 414, la maniere de calculer la ſurface d'un ſecteur. Fig. 20

1°. Lorſqu'on en donnera le rayon & la valeur de l'arc en degrés & minutes.

2°. Lorſqu'on donnera la corde AB & le rayon AC de ſon arc ADB.

3°. Lorſque l'on donnera la corde AB & la fleche DE de ſon arc.

II.

Que ſi l'on demandoit la ſurface du ſegment DABD dont on ſuppoſe que l'on connoît la corde AB, & la fleche ED.

Il eſt évident qu'en calculant d'abord le ſecteur CABDC, par le moyen du rayon & de la longueur de l'arc que l'on détermine par le n°. 414; enſuite la ſurface du triangle ACB, par le moyen de la baſe AB connue, & de ſa hauteur qui eſt le rayon DC, moins la fleche connue ED; & en retranchant enfin la ſurface du triangle ACB de celle du ſecteur CADBC, le reſte ſeroit la ſurface du ſegment DABD.

CHAPITRE HUITIEME.

Rapport des ſurfaces des figures.

On obſervera que dans ce Chapitre & dans le ſuivant, par triangle, parallélogramme, poligone, il faudra entendre la ſurface du triangle, du parallélogramme, & du poligone.

SECTION PREMIERE.

Rapport des parallélogrammes ou des triangles conſidérés en général.

Rapport des mêmes figures lorſqu'elles ont un angle égal.

ARTICLE PREMIER.

Rapport des parallélogrammes ou des triangles conſidérés en général.

416. PROPOSITION. *Deux parallélogrammes quelconques* ABCD, FGHI, *ou deux triangles quelconques* ADB, FIG, *ſont entr'eux comme les produits de leurs baſes par leurs hauteurs.* *Fig.* 205.

C'eſt-à-dire, que l'on a $\left\{\begin{array}{l} \text{ABCD} : \text{FGHI} \\ \text{ou} \\ \text{ADB} : \text{FIG} \end{array}\right. :: \text{AB} \times \text{DE} : \text{FG} \times \text{IK}.$

PRÉPARATION.

Cette propoſition n'eſt qu'une application de ce que l'on a dit (n°. 213) touchant les produiſans des parallélogrammes & des triangles.

DÉMONSTRATION.

204, Les parallélogrammes ABCD, FGHI ſont égaux aux produits de leurs baſes par leurs hauteurs (n°. 213). Donc ils ſont dans le même rapport que ces produits.

Les triangles ADB, FIG, ſont les moitiés des produits de leurs baſes par leurs hauteurs (n°. 216), & les moitiés ſont entr'elles comme les touts. Donc les triangles ſont auſſi dans le rapport des produits de leurs baſes multipliées par leurs hauteurs.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

Puiſque les parallélogrammes ABCD, FGHI, & les triangles ADB, FIG ſont entr'eux comme les produits AB×DE, FG×IK de leurs baſes & de leurs hauteurs; & que,

1°. Ces produits AB×DE, FG×IK forment une raiſon compoſée (n°. 240), dont l'expoſant eſt le produit de l'expoſant de la raiſon AB : FG des baſes, multiplié par l'expoſant de la raiſon DE : IK des hauteurs (n°. 249).

2°. Ces produits AB×DE, FG×IK ſont égaux lorſque l'on a AB : FG :: IK : DE; c'eſt-à-dire, lorſque la hauteur & la baſe de l'un des parallélogrammes, ou de l'un des triangles, ſont réciproques à la hauteur & à la baſe de l'autre parallélogramme ou de l'autre triangle (n°. 252).

3°. Ces produits AB×DE, FG×IK ſont entr'eux comme les hauteurs DE, IK, lorſque les baſes AB, FG ſont égales; & entr'eux comme les baſes AB, FG, lorſque les hauteurs DE, IK ſont égales (n°. 247).

4°. Ces produits AB×DE, FG×IK étant égaux, & les baſes AB, FG étant auſſi égales, les hauteurs DE, IK ſont néceſſairement égales, & ces mêmes produits

roduits étant égaux, & les hauteurs DE, IK étant auſſi égales, les baſes AB, FG ſont néceſſairement égales.

417. On conclurra que 1°. *deux parallélogrammes quelconques* ABCD, FGHI, *ou deux triangles quelconques* ABD, FIG, *forment une raiſon compoſée dont l'expoſant eſt le produit des expoſans des raiſons ſimples, formées de la comparaiſon des baſes & de la comparaiſon des hauteurs.*

418. 2°. *Deux parallélogrammes ou deux triangles quelconques ſont égaux, lorſque la hauteur & la baſe de l'un ſont réciproques à la hauteur & à la baſe de l'autre.*

419. 3°. *Deux parallélogrammes ou deux triangles quelconques ſeront en même rapport que leurs baſes, lorſque leurs hauteurs ſeront égales; & en même rapport que leurs hauteurs, lorſque leurs baſes ſeront égales.*

420. 4°. *Deux parallélogrammes ou deux triangles quelconques qui ſeront égaux, & qui auront des hauteurs égales, auront néceſſairement des baſes égales.*

Et deux parallélogrammes ou deux triangles quelconques qui ſeront égaux, & qui auront des baſes égales, auront néceſſairement des hauteurs égales; c'eſt-à-dire, qu'on pourra les concevoir placés entre les mêmes paralleles.

ARTICLE II.

Rapport des parallélogrammes ou des triangles, lorſqu'ils ont un angle égal.

421. PROPOSITION. *Deux parallélogrammes* ABCD, FGHI, *ou deux triangles* ADB, FIG, *qui ont un angle égal ſont entr'eux comme les produits des côtés qui comprennent l'angle égal; en ſuppoſant, par exemple, l'angle* A = *l'angle* F, *on aura* . . . . Fig. 205

. . . $\left.\begin{matrix} ABCD : FGHI \\ ADB : FIG \end{matrix}\right\} :: AB \times AD : FG \times FI.$

PRÉPARATION.

Comme l'on a démontré (n°. 416) que les parallélogrammes ABCD, FGHI, ou les triangles ABD, FIG, ſont entr'eux comme les produits AB×DE, FG×IK de leurs baſes & de leurs hauteurs, il eſt évident que la proportion que l'on vient de propoſer ſera démontrée, ſi on fait voir que les produits AB×DE, FG×IK, ſont entr'eux comme les produits AB×AD, FG×FI; on va le déduire de la ſuppoſition de l'angle A égal à l'angle F.

DÉMONSTRATION.

Des extrêmités D, I des côtés AD, FI adjacens aux angles égaux A, F, ſoient abaiſſées les perpendiculaires DE, IK ſur les deux autres côtés AB, FG adjacens aux mêmes angles égaux A, F.

A cauſe des angles A & F que l'on ſuppoſe égaux, & des angles droits DAE, IFK, les triangles ADE, FIK ſeront ſemblables (n°. 271).

Ce qui donnera . . . . AD : DE :: FI : IK.

Et en multipliant les deux premiers termes de cette proportion par la baſe AB, le troiſieme & le quatrieme par la baſe FG, on aura (n°. 247) . . . . . AD×AB : DE×AB :: FI×FG : IK×FG, ou (n°. 255) AD×AB : FI×FG :: DE×AB : IK×FG.

Donc puiſque $\left\{\begin{array}{l}\text{ABCD : FGHI}\\ \text{(n°. 416) ADB : FIG}\end{array}\right.$ :: DE×AB : IK×FG.

l'on a encore $\left\{\begin{array}{l}\text{ABCD : FGHI}\\ \text{(n°. 245) ABD : FIG}\end{array}\right.$ :: AD×AB : FI×FG.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

204, 422. *Deux parallélogrammes* ABCD, FGHI, *ou deux triangles* ADB, FIG, *ſeront égaux lorſqu'un an-*

l'un étant égal à un angle de l'autre, les côtés mprendront ces angles égaux ſeront réciproquement tionnels.

exemple, les angles A & F étant égaux, que it . . . . . AD : FI :: FG : AB.
. vient de trouver (n°. 421) en ſuppoſant l'an= F, ABCD : FGHI :: AB × AD : FG × FI.
ou ADB : FIG
is en ſuppoſant encore AD : FI :: FG : AB, (n°. 252) . . . AB × AD = FG × FI.
nc on aura (n°. 244) . . . ABCD = FGHI.
ou ADB = FIG.

SECTION II.

Rapport des Figures ſemblables.

ARTICLE I.

ort des Figures ſemblables, conſidérées en général.

PROPOSITION. *Les figures ſemblables ſont lles comme les quarrés de leurs côtés homologues.*

PRÉPARATION.

mme les triangles ſemblables ſont les moitiés rallélogrammes ſemblables, & que les poligo- mblables ſont compoſés de triangles ſemblables, mmencera par déterminer le rapport des paral- rammes ſemblables, pour en conclurre le rap- des triangles, & celui des poligones ſemblables.

DÉMONSTRATION.

. Les parallélogrammes ſemblables ABCD, abcd

On ſait que les hauteurs DE, *de* ſont propo
nelles aux côtés homologues AB, *ab*..

C'eſt-à-dire, que (n°. 292) AB : *ab* :: DE

On ſait qu'en faiſant dans cette proportion le
duit des antécédens, & celui des conſéquens, on

(n°. 260) . . . AB×DE : *ab*×*de* :: $\overline{AB}^2$

Mais le produit AB×DE des antécédens, c
parallélogramme ABCD; & le produit *ab*×*d*
conſéquens, c'eſt le parallélogramme *abcd* (n°.

Donc . . . . ABCD : *abcd* :: $\overline{AB}$

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

Fig. 204, 206. 2°. *Les triangles ſemblables* ADB, adb *ſon tr'eux comme les quarrés des côtés homologues.*

C'eſt-à-dire, que . . . ADB : *adb* :: $\overline{AB}$

Car les triangles ſemblables ADB, *adb*, ſo
moitiés des parallélogrammes ſemblables ABCD
(n°. 279). Or les moitiés ſont entr'elles comn
touts, & l'on vient de trouver ABCD : *abcd* :: $\overline{A}$

Donc on aura auſſi . . . ADB : *adb* :: $\overline{AB}$

Ce qu'il falloit 2°. *démontrer.*

Fig. 207. 3°. *Les poligones ſemblables* ABCDE, abcde

Parce que les points P, *p* ſont ſemblablement poſés à l'égard des poligones ſemblables proposés, ou, ce qui eſt la même choſe, à l'égard des côtés homologues de ces poligones; les triangles APB & *apb*, BPC & *bpc*, &c. conſtruits ſur les côtés homologues de ces poligones, ſeront ſemblables (n°. 285); & comme l'on vient de voir que les triangles ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; en comparant enſemble les triangles conſtruits ſur les côtés homologues, on aura :

$$\begin{aligned}
APB &: apb :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 \\
APC &: bpc :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 \\
CPD &: cpd :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 \\
DPE &: dpe :: \overline{DE}^2 : \overline{de}^2 \\
EPA &: epa :: \overline{EA}^2 : \overline{ea}^2.
\end{aligned}$$

Mais parce que les poligones ABCDE, *abcde* ſont ſemblables, leurs côtés homologues ſont proportionnels (n°. 274), & par conſéquent auſſi (n°. 259) les quarrés de ces côtés homologues ſont proportionnels. C'eſt-à-dire, que . . . . . .

$\overline{AB}^2 : \overline{ab}^2 :: \overline{BC}^2 : \overline{bc}^2 :: \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2 :: \overline{DE}^2 : \overline{de}^2 :: \overline{EA}^2 : \overline{ea}^2.$

Donc (n°. 245) . . . . . .

$APB : apb :: BPC : bpc :: CPD : cpd :: DPE : dpe :: EPA : epa.$

Donc en ajoutant enſemble les antécédens, & enſemble les conſéquens (n°. 256) . . . . . .

$APB + BPC + CPD + DPE + EPA : apb + bpc + cpd + dpe + epa :: APB : apb :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2.$

C'eſt-à-dire, que $ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

Ce qu'il falloit 3°. démontrer.

CONSÉQUENCES.

424. On ſait (n°. 291) que dans les figures ſembla-

Car parce que les figures faites ſur A & B, comme côtés homologues, ſont ſuppoſées ſemblables, elles ſont entr'elles comme les quarrés AA, BB de ces côtés homologues; c'eſt-à-dire, qu'en déſignant ces figures par X, Y, on aura (n°. 423) X : Y :: AA : BB.

Mais parce que l'on ſuppoſe . . . ∴ A : B : C, on a (n°. 427) . . . . . AA : BB :: A : C.

Donc (n°. 245) . . . . X : Y :: A : C.

PROPOSITION II.

209. 429. *Si trois figures ſemblables* X, Y, Z *ont pour côtés homologues les trois côtés d'un triangle rectangle quelconque* ABC, *la figure* X *faite ſur l'hypothénuſe* AC *ſera égale à la ſomme des figures* Y, Z, *faites ſur les côtés* AB, BC.

C'eſt-à-dire, que l'on aura . . . $X = Y + Z$.

PRÉPARATION.

Cette propoſition eſt une ſuite néceſſaire du rapport des figures ſemblables conſidérées en général, & du rapport du quarré de l'hypothénuſe à la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit dans le triangle rectangle.

DÉMONSTRATION.

Parce que les figures X, Y, Z ſont ſemblables, & ont pour côtés homologues AC, AB, BC, la figure X eſt à la ſomme des figures Y, Z, ce que le quarré de ſon côté AC eſt à la ſomme des quarrés des côtés homologues AB, BC des figures Y, Z (n°. 423).

C'eſt-à-dire, que $Z : Y + Z :: \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Or le triangle ABC étant rectangle, l'on a (n°. 304) . . . . . $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Donc (n°. 244) . . . $X = Y + Z$.

CONSÉQUENCE.

430. *Un triangle rectangle quelconque* ABC, *étant* Fig. 210.
ſcrit dans un cercle, ſi l'on décrit des demi-cercles ſur
s côtés AB, BC *de l'angle droit, la ſomme des lu-*
ules AEBDA, BHCFB, *ſera égale au triangle rec-*
ngle ABC.

Car les demi-cercles étant des figures ſemblables, demi-cercle décrit ſur l'hypothénuſe AC, ſera égal la ſomme des demi-cercles décrits ſur les côtés AB, C de l'angle droit; c'eſt-à-dire, que (n°. 429)

. . . ADFCA = AEBA + BHCB.

Donc en retranchant de chaque membre de cette galité les ſegmens ADBA & BFCB, on aura iangle ABC = ſomme AEBDA + BHCFB des nules.

431. *Que ſi l'on ſuppoſoit le triangle rectangle* ABC Fig. 210.
ſoſcele, chaque lunule AEBDA, BHCFB *ſeroit*
gale à la moitié du triangle rectangle ABC.

Car le triangle ABC étant iſoſcele, c'eſt-à-dire, AB étant égal à BC, on a évidemment le demi-ercle AEBA, décrit ſur le côté AB, égal au demi-ercle BHCB décrit ſur le côté BC, & le ſegment ADBA égal au ſegment BFCB; par conſéquent en etranchant le ſegment ADBA du demi-cercle AEBA, & le ſegment BFCB du demi-cercle BHCB, on ura la lunule AEBDA égale à la lunule BHCFB; & comme (n°. 430) ces deux lunules valent enſem-ble le triangle rectangle ABC, chacune ſera néceſſai-ement égale à la moitié de ce triangle rectangle.

REMARQUE.

432. Par ce mot *lunule* les Mathématiciens enten-dent en général toute figure renfermée entre deux arcs ou portions de courbes : on leur donne différens noms,

ſelon la différence des courbes dont elles ſont formées. Celles dont on vient de parler, & qui ſont formées par deux arcs de cercle, ſe nomment *lunules d'Hippocrate*, parce que c'eſt à cet ancien Géometre que l'on doit leur quadrature, c'eſt-à-dire, la meſure préciſe de leur ſurface.

Ces lunules d'Hippocrate ne ſont pas les ſeules portions du cercle dont on ait la quadrature exacte; par la Géométrie même élémentaire, on parvient à déterminer une infinité d'autres parties de cercles égales chacune à des figures rectilignes.

Soient le cercle YXHF, & dans ce cercle la corde XY tirée à volonté ou donnée de poſition.

§. 311. Soit diviſé le rayon CF en deux parties EF, CE, qui ſoient entr'elles comme deux nombres entiers quelconques *a* & *b*, dont le premier *a* ſoit un terme de la progreſſion double 1, 4, 8, &c. Soit ſur CF comme diametre, décrite la demi-circonférence CGF, & au point E élevée l'ordonnée EG: du point G au point C ſoit menée la corde CG, & enfin du point C comme centre, & avec CG comme rayon, décrite une circonférence ADG. Cela poſé,

Suppoſons que la circonférence ADG rencontre la droite XY en quelque point A, je dis que ſi l'on mene du centre les rayons CA, CX, & que l'on prenne l'arc BD, tel que l'on ait l'arc AB : BD :: *a* : *b*, ou :: EF : CE (ce qui eſt toujours poſſible; car *a* étant un terme de la progreſſion double, on peut (n°. 170) diviſer l'arc AB en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans *a*, & prendre enſuite pour l'arc BD autant de ces parties égales qu'il y a d'unités en *b*); qu'enfin l'on mene le rayon CD que l'on prolongera juſqu'en H à la circonference du cercle donné, on aura la portion ABDHX du cercle donné, égale au triangle ACX.

En effet, les ſecteurs XCH, BCD étant ſemblables, parce que les arcs XH, BD ſont (n°. 52) des arcs de même nombre de degrés, le rapport de ces ſecteurs ſera le même que celui des cercles auxquels ils appartiennent (n°. 248).

C'eſt-à-dire, que ſecteur. XCH : BCD ::
- $\overline{CH}^2 : \overline{CD}^2$ (n°. 416),
- $\overline{CF}^2 : \overline{CG}^2$, parce que CH = CF, & CD = CG
- CF : CE (n°. 427), parce que (n°. 314) CF : CG :: CG : CE.

Or l'on a fait ...
- EF : CE
- AB : BD

:: $a : b$.

On a donc (n°. 245) EF : CE :: l'arc AB : l'arc BD. *Fig. 211.*

Et en compoſant (n°. 255) CF : CE :: l'arc ABD : l'arc BD.

Par conſéquent (n°. 245) ſecteur XCH : ſecteur BCD :: l'arc ABD : l'arc BD.

Et en ſouſtrayant (n°. 255) ſecteur XCH — ſecteur BCD : ſecteur BCD :: l'arc ABD — l'arc BD : l'arc BD.

Ou BDHX : ſecteur BCD :: l'arc AB : l'arc BD.

Mais l'on a évidemment, ſecteur ACB : ſecteur BCD :: l'arc AB : l'arc BD.

Donc (n°. 245) BDHX : ſecteur BCD :: ſecteur ACB : ſecteur BCD.

D'où l'on tire (n°. 244) BDHX = ſecteur ACB.

Et en ajoutant à chaque membre de cette égalité le triligne AXB, on conclurra ABDHX = triangle ACX.

Ce que l'on s'eſt propoſé de démontrer.

On obſervera que comme le rapport $a : b$, dans lequel on a diviſé le rayon CF, peut varier à l'infini, on pourra, pour chaque poſition de la corde XY,

trouver une infinité de portions de cercle toutes quarrables ; & comme la poſition de la corde XY peut varier à l'infini, il eſt évident que le problême par lequel on demanderoit une portion quarrable du cercle à une infinité d'infinités de ſolutions.

PROPOSITION III.

213. 433. *Si d'un même point* A *de la circonférence d'un cercle* X, *on mene un diametre* AB, *& tant de cordes* AC, AD, AE, *&c. que l'on voudra, & que des extrêmités* C, D, E *de ces cordes, on abaiſſe des ordonnées* CF, DG, EH *ſur le diametre* AB, *les quarrés de ce diametre & de ces cordes ſeront entr'eux comme le diametre* AB, *& les abſciſſes* AF, AG, AH *correſpondantes à ces cordes ; c'eſt-à-dire, compriſes entre le point* A *d'origine de ces cordes, & les ordonnées abaiſſées de leurs extrêmités* C, D, E.

C'eſt-à-dire, que AB : AC : AD : AE :: AB : AF : AG : AH.

PRÉPARATION.

On ſe rappellera que ſi d'un même point quelconque de la circonférence du cercle, on mene une ordonnée au diametre de ce cercle, & une corde à l'une des extrêmités de ce diametre, cette corde eſt moyenne proportionnelle entre le diametre & l'abſciſſe correſpondante à la corde (n°. 314), d'où l'on tirera cette démonſtration.

DÉMONSTRATION.

Puiſque les cordes AC, AD, AE ſont moyennes proportionnelles entre le diametre AB & les abſciſſes correſpondantes AF, AG, AH, c'eſt-à-dire, que

ifque $\begin{cases} \div\ AB : AC : AF \\ \div\ AB : AD : AG, \text{ l'on a (n°. 359)} \\ \div\ AB : AE : AH \end{cases} \begin{cases} \overline{AC}^2 = AB \times AF \\ \overline{AD}^2 = AB \times AG \\ \overline{AE}^2 = AB \times AH. \end{cases}$

Par conſéquent en comparant le quarré $\overline{AB}^2$ du diametre, & les quarrés $\overline{AC}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{AE}^2$ des cordes, avec ur valeur $AB \times AB$, $AB \times AF$, $AB \times AG$, $AB \times AH$, n aura $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2 :: AB \times AB : AB \times AF : AB \times AG : AB \times AH$.

Et en diviſant la ſeconde ſuite par le diametre AB, viendra (n°. 247) . . . . . .

. . $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2 :: AB : AF : AG : AH$.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

434. *Les figures ſemblables qui auront pour côtés ho-* Fig. 213
ologues le diametre AB, *& les cordes* AC, AD, AE *rées de la même extrêmité* A *du diametre, ſeront en-'elles comme ce diametre* AB *& les abſciſſes correſpon-ntes* AF, AG, AH, *compriſes entre l'origine* A *des rdes, & les ordonnées* CF, DG, EH *abaiſſées de leurs trêmités.*

Car on vient de trouver (n°. 433) . . . .

. . $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2 :: AB : AF : AG : AH$.

Or les figures ſemblables qui auront pour côtés homologues le diametre AB & les cordes AC, AD, AE, ront entr'elles (n°. 423) comme $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 : \overline{AD}^2 : \overline{AE}^2$.

Donc (n°. 245) elles ſeront auſſi entr'elles comme

. . . . . $AB : AF : AG : AH$.

SECTION III.

Rapport des figures conſidérées dans l'égalité de leurs contours.

435. On appellera *iſopérimetres* les figures dont les contours ſeront égaux.

ARTICLE I.

Rapport des Triangles iſopérimetres.

PROPOSITION I.

436. *Si ſur une même baſe* AC *l'on fait deux triangles égaux, l'un* ABC *iſoſcele ſur* AC, *l'autre* ADC *ſcalene, la ſomme* AD + DC *des côtés du triangle ſcalene ſera plus grande que la ſomme* AB + BC *des côtés du triangle iſoſcele.*

PRÉPARATION.

Parce que les triangles ADC, ABC ſont ſuppoſés égaux, & conſtruits ſur une même baſe, ils ont néceſſairement même hauteur; c'eſt-à-dire, que la droite qui paſſeroit par leurs ſommets D, B, ſeroit parallele à leur baſe AC (n°. 420): on partira de cette propriété pour démontrer la propoſition.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené par les ſommets D, B des triangles ADC, ABC la droite YZ que l'on ſait déja être parallele à la baſe AC, on prolongera le côté AB du triangle iſoſcele ABC, de façon que le prolongement BX ſoit égal à AB ou à BC; ce qui donnera AX=AB

+ BC; par le ſommet D du triangle ſcalene ADC, & par le point X, on menera la droite DX.

Et l'on conſidérera que la droite YZ étant parallele à la baſe AC, & le triangle ABC étant iſoſcele, l'on a l'angle XBZ = BAC (n°. 64), l'angle BAC = l'angle BCA (n°. 147), l'angle BCA = CBZ (n°. 87), d'où l'on tire l'angle CBZ = XBZ; ce qui donne l'angle CBD, ſupplément de CBZ = DBX, ſupplément de XBZ; & comme les côtés qui forment les angles CBD, DBX ſont égaux, à ſavoir, DB commun, & BX = BC, par la conſtruction, les troiſiemes côtés DX, DC ſeront égaux (n°. 55), & par conſéquent AD + DX ſera égale à AD + DC.

Mais dans le triangle ADX,

on a (n°. 58) . . . . . AD + DX > AX.

Donc . . . . . AD + DC > AX.

Et comme AX = AB + BC, par la conſtruction, on conclurra . . . AD + DC > AB + BC.

Ce qu'il falloit exécuter.

PROPOSITION II.

437. *De tous les triangles iſopérimetres faits ſur la même baſe, le plus grand eſt celui qui eſt iſoſcele ſur cette baſe.* Fig. 215.

Par exemple, ayant pris ſur la droite AE, la partie AC moindre que la partie reſtante CE; & ayant coupé cette partie reſtante en deux parties inégales quelconques CD, DE, & en deux parties égales CB, BE.

Si on fait ſur AC le triangle iſoſcele ABC, dont les côtés AB, BC ſoient égaux aux parties égales CB, BE, & le triangle ſcalene ADC dont les côtés AD, DC ſoient égaux aux parties inégales CD, DE chacun à chacune.

Comme ces triangles ABC, ADC ſont faits ſur la même baſe, & évidemment iſopérimetres, il fau-

dra démontrer que l'iſoſcele ABC eſt plus grand
le ſcalene ADC.

PRÉPARATION.

Cette propoſition n'eſt qu'une conſéquence d
précédente.

DÉMONSTRATION.

En ſuppoſant le triangle ſcalene ADC égal au tri
gle ABC iſoſcele iſopérimetre, & fait ſur la mê
baſe AC, la ſomme AD + DC des côtés du triar
ſcalene, ſeroit plus grande que la ſomme AB +
des côtés du triangle iſoſcele (n°. 436).

En ſuppoſant le triangle ſcalene ADC plus gr
que le même triangle iſoſcele ABC, la ſomme
+ DC des côtés du triangle ſcalene ſeroit encor
plus forte raiſon, plus grande que la ſomme AB +
des côtés du triangle iſoſcele.

Mais on ſuppoſe que les triangles, ABC iſoſc
ADC ſcalene, faits ſur la même baſe AC, ſont
périmetres.

Donc le triangle ſcalene ADC ne peut êtr
égal au triangle iſoſcele ABC, ni plus grand qu
triangle. Donc il eſt plus petit.

En général, de tous les triangles iſopérimetres
ſur la même baſe, le plus grand eſt celui qui eſt
cele ſur cette baſe.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

Fig. 216. 438. *Entre les triangles iſoſceles iſopérimetre
plus grand eſt celui dans lequel le côté differe moi
la baſe.* (*On prend pour baſe le côté auquel les deu
tés égaux ſont adjacens*).

Par exemple, étant donné le triangle ABC iſ

ſur AC, & dans lequel on ſuppoſera que le côté AB ou BC differe de la baſe AC de la quantité CF, de ſaçon que chaque côté BC ou AB ſoit égal à AC + CF.

Si coupant CF en deux également au point H, on fait ſur le côté BC un triangle BDC, dont chaque côté BD, BC ſoit égal à AC + CH; ces triangles iſoſceles ABC, BDC ſeront évidemment iſopérimetres, puiſque BC étant commun dans ces triangles, la ſomme des côtés AB, AC du premier eſt 2AC + CF (AB étant, par la ſuppoſition, égal à AC + CF), & que la ſomme des côtés BD, DC du ſecond eſt auſſi 2AB + CF (chaque côté BD, DC étant, par la conſtruction, égal à AC + CH, ou + ½ CF).

De plus, dans le triangle iſoſcele BDC, le côté BD differe de la baſe BC d'une quantité CH, moindre que la différence CF du côté AB à la baſe AC, dans le triangle iſoſcele ABC.

Ainſi on aura à démontrer que le triangle BDC eſt plus grand que le triangle ABC.

PRÉPARATION.

Il ſuffira de rappeller la propoſition précédente.

DÉMONSTRATION.

On ſait (n°. 437) que de tous les triangles iſopérimetres, faits ſur la même baſe, l'iſoſcele eſt le plus grand.

Mais en prenant pour baſe dans les triangles iſopérimetres ABC, BDC, le côté commun BC, le triangle BDC eſt, par la conſtruction même, iſoſcele ſur cette baſe BC, & le triangle ABC, que l'on ſuppoſe iſoſcele ſur AC, ſera ſcalene ſur BC.

Donc le triangle BDC eſt plus grand que le triangle ABC.

Et comme dans le triangle iſoſcele BDC, le côté

BD differe de la baſe BC d'une quantité moindre que celle dont le côté AB differe de la baſe AC dans le triangle ABC, on conclurra en général que de tous les triangles iſoſceles iſopérimetres, le plus grand eſt celui dont le côté differe moins de la baſe.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

217. 439. Comme le triangle équilatéral PQR eſt un triangle iſoſcele dans lequel la différence du côté à la baſe eſt zero, & par conſéquent la plus petite poſſible; & que l'on vient de voir que les triangles iſoſceles iſopérimetres augmentent à meſure que leur côté differe moins de leur baſe;

Il eſt viſible que *de tous les triangles iſopérimetres le plus grand eſt l'équilatéral.*

ARTICLE II.

Rapport des Quadrilateres iſopérimetres.

PROPOSITION I.

218. 440. *De tous les rectangles iſopérimetres le plus grand eſt le quarré, & les autres ſont d'autant moindres que leurs côtés ſont plus inégaux.*

Par exemple, ayant coupé une droite quelconque DL en deux également au point A, de façon que AD = AL, en deux parties inégales DM, ML au point M, & au point *m* en deux parties D*m*, *m*L, encore plus inégales que les précédentes, de façon que la demi-différence *m*A des parties D*m*, *m*L, ſoit plus grande que la demi-différence MA des parties DM, ML.

Si l'on fait le quarré DB de la moitié AD de la droite DL, le rectangle DN des parties DM, ML,

e façon que les côtés DM, MN ſoient égaux aux arties inégales DM, ML.

Enfin le rectangle D*n* dont les côtés D*m*, *mn* oient égaux aux parties inégales D*m*, *m*L.

Comme le quarré DB & les rectangles DN, D*n* nt évidemment chacun pour contour le double de la roite DL, & ſont par conſéquent iſopérimetres, il audra prouver . . . . DB > DN ou > D*n*, c . . . . . DN > D*n*.

PRÉPARATION.

Il ſuffira, pour la démonſtration, de ſe rappeller ce que l'on a dit touchant la valeur du rectangle des deux arties d'une droite quelconque (n°. 210). *Fig.* 11

DÉMONSTRATION.

On ſait (n°. 210) que le rectangle des deux parties inégales d'une droite eſt égal au quarré de la moitié de cette droite moins le quarré de la demi-différence de ces deux parties.

Ainſi l'expreſſion du quarré DB de la moitié de DL étant . . . . . DB = $\overline{AD}^2$

L'expreſſion du rectangle DN, des deux parties DM, ML dont la demi-différence eſt MA, ſera . . . . . DN = $\overline{AD}^2 - \overline{MA}^2$

L'expreſſion du rectangle D*n* des deux parties D*m*, *m*L, dont la demi-différence eſt *m*A, ſera . . . . . D*n* = $\overline{AD}^2 - \overline{mA}^2$.

Or il eſt viſible que $\overline{AD}^2$ eſt plus grand que $\overline{AD}^2 - \overline{MA}^2$, & plus grand que $\overline{AD}^2 - \overline{mA}^2$.

Et parce que *m*A eſt ſuppoſé plus grand que MA, on a encore évidemment $\overline{AD}^2 - \overline{MA}^2 > \overline{AD}^2 - \overline{mA}^2$.

Donc . . . quarré DB > rectangle DN ou D*n*.
Et . . . . . rectangle DN > rectangle D*n*.
Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

g. 219. 441. *Si ſur une même baſe* AB *on fait un rectangle* AC, *& des parallélogrammes* AQ, AS, *&c. de même contour (ce qui aura lieu en faiſant égaux les côtés* AD, AP, AR); *le rectangle* AC *ſera plus grand que chacun des parallélogrammes* AQ, AS, *& le parallélogramme* AQ, *dont le côté* AP *eſt le moins incliné ſur la baſe* AB, *ſera plus grand que le parallélogramme* AS, *dont le côté* AR *eſt plus incliné ſur la même baſe* AB.

PRÉPARATION.

Les conditions de la propoſition donnent lieu à l'application de ces principes, d'abord que les parallélogrammes de même hauteur ſont entr'eux comme leurs baſes; & enſuite que dans le même cercle le ſinus de l'angle droit eſt le plus grand de tous les ſinus, & les ſinus des angles aigus augmentent lorſque ces angles aigus augmentent: c'eſt dans l'application de ces principes que conſiſtera la démonſtration.

DE'MONSTRATION.

Puiſque le rectangle AC, & les parallélogrammes AQ, AS ſont ſuppoſés de même baſe AB, ce rectangle & les parallélogrammes ſont entr'eux comme leur hauteur AD, PM, RN (n°. 419).

Parce que le rectangle AC, & ces parallélogrammes AQ, AS ont des contours égaux, & une même baſe AB, leurs côtés AD, AP, AR ſont néceſſairement égaux. Par conſéquent les hauteurs AD, PM, RN, peuvent être conſidérées comme des ſinus de différens angles dans un même cercle; & comme dans un mê-

me cercle le ſinus de l'angle droit eſt le plus grand des ſinus, & que les ſinus des angles aigus augmentent lorſque ces angles augmentent (nos. 331, 332), on conclurra que la hauteur AD du rectangle AC, laquelle eſt le ſinus de l'angle droit DAY, eſt plus grande que chacune des hauteurs PM, RN qui ſont les ſinus des angles aigus PAY, RAY; & l'angle aigu PAY étant plus grand (par la ſuppoſition) que l'angle aigu RAY, la hauteur PM qui eſt le ſinus du premier ſera plus grande que la hauteur RN qui eſt le ſinus du ſecond.

C'eſt-à-dire, que l'on aura AC > PM, PM > RN.

Donc le rectangle AC eſt plus grand que le parallélogramme AQ. *Fig.* 21

Et le parallélogramme AQ eſt plus grand que le parallélogramme AS.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

442. *Si l'on fait ſur une même baſe* AD *un trapézoïde* ABCD, *dont les trois autres côtés* AB, BC, CD *ſoient égaux entr'eux, & un trapeze quelconque* AEFD, *dont les trois côtés* AE, EF, FD *ſoient égaux auſſi entr'eux, & aux trois côtés* AB, BC, CD *du trapézoïde; le trapézoïde* ABCD *ſera plus grand que le trapeze* AEFD. *Fig.* 22 221, 22 223, 22

PRÉPARATION.

Les différentes manieres dont on peut diſpoſer les côtés AE, EF, FD du trapeze, par rapport au trapézoïde ABCD, ſe réduiſent à celles-ci :

Ou le côté EF coupera le côté BC parallele à la baſe AD. *Fig.* 22

Ou ce côté EF paſſera par l'une C des extrêmités du côté parallele BC. *Fig.* 22

g. 222, , 224. Ou ce côté EF coupera l'un CD des côtés non parralleles du trapézoïde.

Et dans ce dernier cas le ſommet de l'angle F pourra être ou au-deſſus du prolongement du côté parallele BC, ou au-deſſous, ou ſur ce prolongement.

La propoſition, dans tous ces cas, ne ſera qu'une ſuite de la précédente.

DE'MONSTRATION.

Dans tous les cas de la propoſition, on joindra les ſommets B & E, C & F, E & C par les droites BE, CF, EC, & lorſque le ſommet de l'angle F ſera au-deſſous du prolongement du côté parallele BC, on prolongera le côté EF juſqu'à un point G de ce prolongement.

PREMIER CAS,

Où l'on ſuppoſe que le côté EF *coupe le côté parallele* BC *en un point quelconque.*

g. 220. Alors il eſt évident que l'angle AEF étant plus ouvert que l'angle ABC, le milieu du côté EF doit être plus proche de la baſe AD, que ſi l'angle AEF étant égal à l'angle ABC, le côté EF étoit confondu avec le côté BC parallele à AD; le milieu du côté EF ſera donc au-deſſous du côté parallele BC, à l'égard de la baſe AD; c'eſt-à-dire, que le ſegment intérieur EO ſera plus grand que la moitié de EF, & par conſéquent plus grand que le ſegment extérieur OF; ce qui donnera encore le ſegment BO du côté BC plus grand que la moitié de ce côté BC: car le ſegment EO étant plus grand que la moitié de EF ou du côté égal BC, ſi le ſegment BO étoit ou la moitié de BC, ou plus petit que cette moitié, on auroit EO > BO; & en ajoutant les côtés égaux AE, AB, on auroit

AE + EO > AB + BO ; ce qui eſt évidemment abſurde (n°. 54). Donc le ſegment BO eſt plus grand que la moitié de BC, ou, ce qui eſt la même choſe, OC eſt moindre que la moitié de BC ; & comme EO eſt plus grand que la moitié de EF, ou de ſon égal BC, on conclurra EO > OC.

Or EO étant plus grand que OC, on aura dans le triangle EOC, l'angle OCE oppoſé à EO plus grand que l'angle OEC oppoſé à OC (n°. 145), ou dans les triangles BCE, FEC, l'angle BCE plus grand que l'angle FEC ; & comme les côtés de ces angles BCE, FEC ſont égaux, à ſavoir, EC commun, & BC = EF par la ſuppoſition, on conclurra (n°. 56) que BE oppoſé au plus grand angle BCE eſt plus grand que CF oppoſé au plus petit FEC ; d'où l'on déduira que dans les triangles BAE, CDF, dont les côtés AB, AE, CD, DF ſont égaux par la ſuppoſition, l'angle BAE oppoſé à la plus grande baſe BE eſt plus grand que l'angle CDF oppoſé à la moindre CF (n°. 57).

Conſidérant donc les triangles BCE & FEC comme des moitiés de parallélogrammes iſopérimetres faits ſur la même baſe EC, & dont les côtés égaux ſeroient BC, EF, on aura le triangle BCE > FEC, à cauſe de l'angle BCE moins aigu que l'angle FEC (n°. 441).

Conſidérant les triangles BAE, CDF auſſi comme des moitiés de parallélogrammes iſopérimetres dont les baſes égales ſeroient AE & CD, & dont les côtés égaux ſeroient AB & DF, on aura le triangle BAE > CDF, à cauſe de l'angle BAE plus grand que l'angle CDF.

Donc la ſomme des triangles BAE, BCE, & de la partie commune AECD eſt plus grande que la ſomme des triangles CDF, FEC, & de la partie commune AECD.

C'eſt-à-dire, que le trapézoïde ABCD eſt plus grand que le trapeze AEFD, lorſque ſon côté EF coupe le côté parallele BC en quelque point O.

SECOND CAS,

Où l'on ſuppoſe que le côté EF *paſſe par l'une* C *des extrêmités du côté parallele* BC.

121. Il eſt évident qu'alors on a BE > CF, puiſqu'en ajoutant à BE & à CF la même partie commune EC, on a d'une part BE + EC > BC (n°. 53), ou BE + EC > EF, parce que (ſuppoſition) BC = EF.

On a d'autre part CF + EC = EF, d'où l'on tire BE + EC > CF + EC, ou ſimplement BE > CF.

Par conſéquent (n°. 57) comme les angles BAE, CDF ont leurs côtés égaux par la ſuppoſition, on aura l'angle BAE oppoſé à la plus grande baſe BE, plus grand que l'angle CDF oppoſé à la moindre baſe CF.

D'où l'on déduira, comme l'on a fait dans la démonſtration du premier cas, que le triangle BAE eſt plus grand que le triangle CDF.

Ainſi la ſurface ABECD ſera plus grande que le trapeze AEFD; & à plus forte raiſon le trapézoïde ABCD ſera plus grand que le trapeze AEFD, dont le côté EF paſſe par le ſommet C du trapézoïde.

TROISIEME CAS,

Où l'on ſuppoſe que le côté EF *coupe le côté non parallele* CD *du trapézoïde.*

123, 124. L'angle BCE étant extérieur à l'égard du triangle CEG (*Fig.* 222, 224), ou à l'égard du triangle CEF (*Fig.* 223), il eſt évidemment plus grand que l'angle CEF qui eſt l'un des deux intérieurs oppoſés (n°. 141); & comme les côtés de ces angles BCE, CEF

ont égaux, CE étant commun, & BC étant égal à EF par la ſuppoſition, la baſe BE oppoſée au plus grand angle BCE, ſera plus grande que la baſe CF oppoſée au plus petit angle CDF (n°. 56).

D'où l'on déduira, comme ci-deſſus, que le triangle BAE eſt plus grand que le triangle CDF, & à plus forte raiſon, plus grand que le triangle ODF.

Donc la ſurface ABEOD eſt plus grande que le trapeze AEFD, & à plus forte raiſon le trapézoïde ABCD eſt plus grand que le trapeze AEFD.

Donc, en général, ſi l'on fait ſur une même baſe un trapézoïde dont les trois autres côtés ſoient égaux entr'eux, & un trapeze quelconque dont les trois autres côtés ſoient auſſi égaux entr'eux, & à ceux du trapézoïde, le trapézoïde ſera plus grand que le trapeze.

Ce qu'il falloit démontrer.

ARTICLE III.

Rapport des Poligones iſopérimetres.

PROPOSITION I.

443. *De tous les poligones iſopérimetres d'un même nombre de côtés, le plus grand eſt le poligone régulier.*

PRÉPARATION.

On comparera le poligone régulier ABCDE, avec les poligones iſopérimetres, & d'un même nombre de côtés ABCFE, ABFGE, dans leſquels on ſuppoſera la moindre irrégularité; en faiſant voir que dans cette ſuppoſition même, les poligones irréguliers ABCFE, ABFGE ſont moindres que le régulier iſopérimetre, & d'un même nombre de côté ABCDE, on pourra conclurre qu'ils ſont, à plus forte raiſon, plus petits lorſque leur irrégularité augmente. *Fig.* 226.

Ce que l'on a dit touchant les triangles iſopérimetres (n°. 437), & touchant les quadrilateres iſopérimetres (n°. 442), ſuffira pour la démonſtration.

DÉMONSTRATION.

225. 1°. Comparant le poligone régulier ABCDE au poligone iſopérimetre, & d'un même nombre de côtés ABCFE qui n'a ni tous ſes angles, ni tous ſes côtés égaux, on leur ſuppoſera la partie commune EABC, enſorte que l'irrégularité du poligone ABCFE ne viendra que de l'irrégularité des côtés EF, FC, & ſera la moindre poſſible.

En menant la droite EC, il eſt viſible que l'on aura démontré que le poligone régulier ABCDE eſt plus grand que l'irrégulier ABCFE, ſi on fait voir que le triangle évidemment iſoſcele EDC, qui compoſe le poligone régulier avec la partie commune EABC, eſt plus grand que le triangle ſcalene EFC qui compoſe le poligone irrégulier avec la partie commune EABC : or ceci eſt évident.

Car les poligones ABCDE, ABCFE étant iſopérimetres, & ayant de plus les côtés communs EA, AB, BC, il eſt néceſſaire que la ſomme ED + DC des côtés reſtans du poligone régulier, ſoit égale à la ſomme EF + FC des côtés reſtans du poligone irrégulier.

Ainſi les triangles EDC, EFC, conſtruits ſur la même baſe EC, ſont iſopérimetres ; donc le triangle EDC, iſoſcele ſur EC, eſt plus grand que le ſcalene EFC ſur la même baſe EC (n°. 437).

Donc le poligone régulier ABCDE eſt plus grand que le poligone iſopérimetre, & d'un même nombre de côtés ABCFE, dans lequel on a ſuppoſé la moindre irrégularité dans ſes angles & dans ſes côtés.

226. 2°. Comparant le poligone régulier ABCDE au

poligone iſopérimetre, & d'un même nombre de côtés ABFGE, dont les côtés ſont égaux, mais dont les angles ſont inégaux, on leur ſuppoſera la partie commune EAD, enſorte que l'irrégularité du poligone ABFGE ne viendra que de l'inégalité des angles ABF, BFG, &c.

Il eſt viſible qu'en menant la droite EB, on aura démontré que le poligone régulier ABCDE, eſt plus grand que l'irrégulier ABFGE, ſi on fait voir que le quadrilatere EDCB qui, avec le triangle EAB, compoſe le régulier, eſt plus grand que le quadrilatere EGFB qui, avec le même triangle EAB, compoſe le poligone irrégulier.

Or le quadrilatere EDCB eſt plus grand que EGFB; car ces deux quadrilateres ſont faits ſur la même baſe EB, les côtés EG, GF, FB de l'un ſont, par la ſuppoſition, égaux entr'eux, & égaux aux trois côtés ED, DC, CB de l'autre; le quadrilatere EGFB eſt évidemment un trapeze; & le quadrilatere EDCB eſt un trapézoïde: car en inſcrivant le poligone régulier ABCDE dans un cercle, & en menant la diagonale EC, comme les côtés égaux ED, BC ſoutiendront des arcs égaux, les angles DCE, CEB à la circonférence, & appuyé ſur ces arcs égaux, ſeront égaux (n°. 104): or l'égalité de ces angles alternes fait connoître que les droites DC, EB ſont paralleles, & que par conſéquent le quadrilatere EDCB eſt un trapézoïde (n°. 193).

Donc (n°. 442) EDCB eſt plus grand que EGFB.

Donc le poligone régulier ABCDE eſt plus grand que le poligone iſopérimetre, & d'un même nombre de côtés ABFGE, dont les côtés ſont égaux, & les angles inégaux.

Et comme dans les deux cas que l'on vient de démontrer, on a ſuppoſé la moindre irrégularité dans

les poligones, on conclurra en général que de tous les poligones iſopérimetres d'un même nombre de côtés, le plus grand eſt le poligone régulier.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION II.

444. *Entre les poligones réguliers circonſcrits à un même cercle, celui qui a le plus de côtés a le moindre contour.*

PRÉPARATION.

Cette propoſition eſt évidente lorſque l'on circonſcrit au même cercle deux poligones réguliers, tels que le nombre des côtés de l'un ſoit double du nombre des côtés de l'autre.

227. Que l'on circonſcrive, par exemple, au cercle X, le quarré ABCD, & l'octogone MNOPQRST, il eſt viſible qu'en retranchant des côtés du quarré les côtés MN, OP, QR, ST; les contours NBO, PCQ, RDS, TAM formés par les parties reſtantes des côtés du quarré ſont plus grands que les côtés correſpondans NO, PQ, RS, TM de l'octogone; ce qui montre que le contour de l'octogone eſt moindre que le contour du quarré.

En prenant la propoſition dans toute ſa généralité, on donnera la démonſtration qui ſuit.

DÉMONSTRATION.

La circonférence du cercle eſt plus petite que le contour du poligone régulier quelconque, circonſcrit à ce cercle; par conſéquent plus le contour du poligone régulier circonſcrit au cercle s'approchera de la circonférence, plus il ſera petit.

Or il eſt évident que plus un poligone régulier circonſcrit au cercle, a de côtés, plus ſon contour s'ap-

proche de la circonférence ; car les côtés du poligone régulier circonſcrit ſont autant de tangentes qui s'écartent d'autant moins de la circonférence, que ces côtés ſont plus petits, ou en plus grand nombre ; enſorte que ſi le poligone circonſcrit étoit d'une infinité de côtés, ſon contour ſe confondroit avec la circonférence du cercle.

Donc plus un poligone régulier circonſcrit au cercle a de côtés, plus ſon contour eſt petit.

En général, de tous les poligones réguliers circonſcrits à un même cercle, celui qui a le plus de côtés a le moindre contour.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION III.

445. *Entre les poligones réguliers iſopérimetres le plus grand eſt celui qui a le plus de côtés.*

Par exemple, en faiſant ſur la cinquieme partie MQ de la droite MN le pentagone régulier ABCDE, dont le contour ſera évidemment égal à la droite MN. *Fig.* 228, 229, 230.

En faiſant ſur MP, ſixieme partie de la droite MN, l'exagone régulier ABCDEF, dont le contour ſera encore égal à la droite MN.

Il faudra démontrer l'exagone ABCDEF > pentagone ABCDE.

PRÉPARATION.

On ſe rappellera (n°. 224) qu'en menant dans les poligones réguliers ABCDE, ABCDEF, les apothemes OG, OH, ces poligones ſont égaux aux produits de la moitié de leur contour par leur apothemes ; & parce que l'on ſuppoſe que les contours de ces poligones ſont égaux, on conclurra que ces poligones ſont entr'eux comme leurs apothemes (n°. 247).

C'eſt-à-dire, que ABCDEF : ABCDE :: OH : OG.

CHAPITRE NEUVIEME

Application du Chapitre huitieme.

SECTION PREMIERE.

Le changement, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des Triangles.

PROBLÊME I.

ig. 231, 448. *UN triangle* ABE *étant donné, faire un autre triangle de même ſurface, & dont la hauteur ſoit égale à une droite* BH *donnée.*

SOLUTION.

Deux triangles ſont égaux lorſque la hauteur & la baſe de l'un ſont réciproques à la hauteur & à la baſe de l'autre (n°. 418); ainſi, pour avoir un triangle égal au triangle ABE, & dont la hauteur ſoit égale à la droite donnée BH, on propoſera la méthode ſuivante.

On cherchera (n°. 349) une quatrieme proportionnelle à la hauteur donnée BH, à la hauteur & à la baſe AE du triangle ABE propoſé.

Ayant tiré une droite *ac* égale à la quatrieme proportionnelle que l'on aura trouvée, on élevera ſur à un point quelconque *h* une perpendiculaire *hb* l'on fera égale à la droite HB donnée; & par trêmité *b* de la perpendiculaire *hb*, on menera droite *bd* parallele à *ac*.

Tout triangle *abc* ou *adc*, qui aura pour ba

droite ac, & dont le ſommet ſera ſur la parallele bd, ſera le triangle demandé.

Car le triangle abc ou adc aura d'abord pour la hauteur la droite bh égale à la droite BH donnée.

Ce même triangle abc ou adc ſera de plus égal au triangle ABE propoſé; car puiſque l'on a fait . . . . . HB ou hb : BD : AE : ac, la hauteur hb & la baſe ac ſeront réciproques à la hauteur BD & à la baſe AE.

PROBLÊME II.

449. *Faire un quarré égal à un triangle* ABE *donné.* *Fig.* 231 233.

SOLUTION.

On cherchera (n°. 373) une moyenne proportionnelle MO entre les deux produiſans de la ſurface du triangle ABE; par exemple, entre la hauteur BD, & la moitié de ſa baſe AE.

On fera enſuite (n°. 182) ſur cette moyenne proportionnelle MO, le quarré Z qui ſera égal au triangle ABE propoſé.

Car puiſque l'on a fait $BD : MO :: MO : \frac{AE}{2}$

on aura (n°. 253) . . . . . $\frac{BD \times AE}{2} = \overline{MO}^2$,

ou le triangle ABE (n°. 216) = le quarré Z (n°. 199).

PROBLÊME III.

450. *Un triangle* ABE *étant donné, faire un parallélogramme de même ſurface que ce triangle, & dont la hauteur ſoit égale à une droite* PH *donnée.* *Fig.* 231 234.

SOLUTION.

Afin que le parallélogramme à conſtruire ſoit égal

au triangle ABE donné, il faut que ſa baſe cherchée & ſa hauteur PH donnée ſoient réciproques aux deux produiſans de la ſurface du triangle ABE donné; par exemple, à ſa hauteur BD, & à la moitié de ſa baſe AE (n°. 252).

On prendra donc d'abord une quatrieme proportionnelle à la droite PH donnée, à la hauteur BD, & à la moitié de la baſe AE du triangle ABE.

Ayant enſuite tiré une droite MO égale à la quatrieme proportionnelle que l'on aura trouvée, on élevera ſur cette droite MO une perpendiculaire MR égale à la droite donnée PH, & par l'extrêmité R de cette perpendiculaire, on menera la droite RQ indéfinie, parallele à MO.

Tout parallélogramme MS ou MQ, qui ſera fait ſur la baſe MO, & dont le côté oppoſé à la baſe MO ſera pris ſur la parallele RQ, aura ſa hauteur MR égale à la droite donnée PH, par la conſtruction; & en outre ſes produiſans réciproques à ceux du triangle ABE, puiſque l'on a fait PH ou MR : BD :: $\frac{AE}{2}$: MO.

Et par conſéquent tout parallélogramme MS ou MQ ſera le parallélogramme demandé.

PROBLÊME IV.

235, 237. 451. *Exprimer par des lignes droites les rapports de pluſieurs triangles* ABC, DEF, hef *donnés.*

SOLUTION.

Les triangles de même hauteur ſont proportionnels à leurs baſes (n°. 419).

Ainſi ſi les triangles ABC, DEF, *hef* propoſés ont même hauteur, les baſes AC, DE, *hf* ſeront les lignes droites qui exprimeront les rapports de ces triangles; c'eſt-à-dire, que l'on aura . . . . . ABC : DEF : *hef* :: AC : DF : *hf*.

les triangles proposés ont des hauteurs inégales, s changera (n°. 448) en d'autres triangles de mê- iauteur ; & alors leurs rapports seront exprimés es bases de ces nouveaux triangles.

PROBLÊME V.

; 2. *Faire un triangle égal à la somme de tant de* Fig. 235, *gles* ABC, DEF, hef *que l'on voudra.* 236, 237.

SOLUTION.

les triangles ABC, DEF, *hef* que l'on propose uter ont des hauteurs égales, on fera un triangle la hauteur soit égale à celle des proposés, & la base soit la somme AC + DF + *hf* de leurs s ; & ce triangle construit sera la somme des trian- proposés.

ar parce que l'on aura donné au triangle cons- une hauteur égale à celle des triangles proposés, riangle construit sera (n°. 419) à la somme C + DEF + *hef* des triangles proposés, ce la base du triangle construit est à la somme + DF + *hf* des bases des triangles proposés.

ar conséquent, comme l'on aura fait la base du igle construit égal à la somme AC + DF + *hf* bases des triangles proposés, le triangle construit la somme des triangles proposés.

i les triangles proposés ont des hauteurs inégales, es changera (n°. 448) en d'autres triangles de ne hauteur ; puis on fera la somme de ces nou- ix triangles, comme on vient de le dire.

PROBLÊME VI.

53. *Faire un triangle qui soit la différence de deux* Fig. 236, *gles* DEF, hef *donnés.* 237.

SOLUTION.

i les triangles proposés DEF, *hef* ont des hau-

teurs égales, on prendra la différence DH de leu baſes DF, *hf*, en portant la baſe *hf* du plus peti triangle ſur la baſe DF du plus grand, de F en H on fera enſuite ſur la différence DH comme baſe, u triangle DEH de même hauteur que les propoſés.

Le triangle DEH ſera la différence des triangle DEF, *hef*; car les triangles DEH, DEF, *hef* ayan des hauteurs égales, le triangle DEH eſt (n°. 419) l'égard des triangles DEF, *hef*, ce que la baſe DH du premier eſt à l'égard des baſes DF, *hf* des deu autres. Mais (par la conſtruction) DH eſt la diffé rence des baſes DF, *hf*; donc le triangle DEH e auſſi la différence des triangles DEF, *hef*.

Si les triangles donnés ont des hauteurs inégales on changera l'un des deux en un triangle de mêm hauteur que l'autre (n°. 448); puis on en prendra l différence comme on vient de le preſcrire.

PROBLÊME VII.

g. 238. 454. *Un triangle* ABC *étant donné, faire un triangle avec lequel le triangle propoſé ſoit dans le rapport des droites* a, b *données.*

SOLUTION.

On prendra (n°. 349) une quatrieme proportionnelle CX aux deux droites *a*, *b* données, & à la baſe AC du triangle ABC, propoſée.

On fera enſuite ſur cette quatrieme proportionnelle CX comme baſe, un triangle CBX de même hauteur que le propoſé ABC.

Et l'on aura . . . triangle ABC : BCX :: *a* : *b*.

Car les triangles ABC, CBX ayant même hauteur par la conſtruction, on aura (n°. 419) . . . . . triangle ABC : CBX :: AC : CX.

Mais l'on a fait . . . . . $a : b :: AC : CX$.
Donc . . . triangle $ABC : CBX :: a : b$.

PROBLÊME VIII.

455. *Un triangle* ABC *étant donné, faire un trian-* Fig. 238
qui en ſoit un multiple, ou un ſous-multiple détermi-
; c'eſt-à-dire, qui contienne le triangle propoſé, ou
y ſoit contenu un nombre de fois déterminé.

SOLUTION.

Parce que les triangles de même hauteur ſont en-
ux comme leurs baſes (n°. 419), il eſt viſible que
n aura un triangle qui ſera un multiple ou un ſous-
ltiple déterminé du triangle ABC donné; en fai-
it un triangle de même hauteur que le triangle ABC,
dont la baſe contienne la baſe du triangle ABC,
y ſoit contenu autant de fois que le triangle de-
ndé doit contenir le triangle ABC, ou y être con-
nu.

Par exemple, ſi on vouloit un triangle double du
angle ABC, on prendroit une droite CX double
la baſe AC du triangle donné; & ſur cette droite
X comme baſe, on feroit un triangle CBX de mê-
hauteur que le propoſé ABC.

PROBLÊME IX.

456. *Diviſer un triangle* ABC *donné, par des droi-* Fig. 239
menées du ſommet B *à la baſe* AC, *en des parties* 240.
oportionnelles aux ſegmens ab, bc, cd *de la droite*
nnée.

SOLUTION.

En mettant en avant ce principe, les triangles qui
nt des hauteurs égales, ſont entr'eux comme leurs
aſes, on conclurra cette méthode.

On diviſera (n°. 351) la baſe AC du triangle ABC donnée dans les ſegmens AD, DE, EC proportionnels aux ſegmens *ab*, *bc*, *cd* de la droite *ad* donnée; on menera enſuite par le ſommet B & par les points D, E de diviſion, les droites BD, BE; & le triangle ABC donné ſera partagé dans les triangles ABD, DBE, EBC proportionnels aux ſegmens *ab*, *bc*, *cd* de la droite *ad* donnée; c'eſt-à-dire, que . . . triangle ABD : DBE : EBC :: *ab* : *bc* : *cd*.

Car parce que les triangles ABD, DBE, EBC ont même hauteur, l'on a . . . . . triangle ABD : DBE : EBC :: AD : DE : EC.

Mais l'on a fait AD : DE : EC :: *ab* : *bc* : *cd*.

Donc, triangle ABD : DBE : EBC :: *ab* : *bc* : *cd*.

REMARQUE.

§ 339. 457. Si l'on propoſoit de diviſer le triangle *ABC* en un nombre déterminé de parties égales, toujours par des droites menées du ſommet B ſur la baſe AC, il eſt évident qu'il faudroit diviſer la baſe AC en un nombre de parties égales, & mener enſuite des droites par le ſommet B, & par les points de diviſion de la baſe.

PROBLÊME X.

§ 341. § 342. 458. *Diviſer un triangle* ABC *par des droites qui paſſent par un point donné* D *dans ſa ſurface, en des parties proportionnelles aux ſegmens* PR, RS, ST, TV *d'une droite donnée* PV.

SOLUTION.

1°. L'on menera du point donné D les droites DA, DC, DB aux ſommets des angles du triangle ABC donné, qui ſera, par cette conſtruction, diviſé dans les triangles ADC, CDB, BDA.

2°. On fera (n°. 448) les triangles *adc*, *cdb*, *bdh* de même hauteur, & égaux aux triangles ADC, CDB, BDA chacun à chacun; on mettra les baſes *ac*, *cb*, *bh* des triangles *adc*, *cdb*, *bdh*, bout à bout en ligne droite, & leurs ſommets au même point *d* pour avoir le triangle *adh* égal à leur ſomme (n°. 452), & par conſéquent égal au triangle ABC donné.

On diviſera enſuite (n°. 456) le triangle total *adh*, par des droites menées du ſommet *d* à la baſe *ah*, dans les parties *ade*, *edf*, *fdg*, *gdh* proportionnelles aux ſegmens PR, RS, ST, TV de la droite PV donnée.

3°. On diviſera (n°. 456) le triangle ADC par des droites DE, DF menées par le point donné D ſur le côté AC, en des parties ADE, EDF, FDC proportionnelles aux ſegmens *ae*, *ef*, *fc* de la baſe *ac* du triangle *adc* égal au triangle ADC; on obſervera de placer les points E, F de diviſion ſur le côté AC, à l'égard du point A, de la même façon que les points *e*, *f* de diviſion le ſont ſur la baſe *ac* à l'égard du point *a* correſpondant au point A; & l'on remarquera en paſſant que les triangles ADE, EDF, FDC étant proportionnels aux ſegmens *ae*, *ef*, *fc* ſont dès-lors proportionnels aux triangles *ade*, *edf*, *fdc* (n°. 245).

On diviſera de même le triangle CDB par la droite DG menée ſur le côté CB par le point donné D, dans les triangles CDG, GDB proportionnels aux ſegmens *cg*, *gb* de la baſe *cb*, ou (n°. 245) proportionnels aux triangles *cdg*, *gdb* qui compoſent le triangle *cdb* égal au triangle CDB.

Par cette conſtruction le triangle ABC ſera diviſé par le côté AD du premier triangle ADC, & par les droites DE, DF, DG menées du point donné D aux points E, F, G de diviſion, en des parties ADE,

EDF, FDGC, GBAD proportionnels aux segmens de la droite PV. C'eſt-à-dire, que l'on aura ADE : EDF : FDGC : GBAD :: PR : RS : ST : TV.

Voici comme l'on pourra le démontrer. On a par la conſtruction ADE : EDF : FDC :: *ade* : *edf* : *fdc*.

Donc en compoſant (n°. 255) . . . .

ADC : ADE : EDF : FDC : *adc* : *ade* : *edf* : *fdc*.

Mais . . . triangle ADC = *adc* (conſtruction).

Donc . . . . . $\begin{cases} \text{ADE} = ade \\ \text{EDF} = edf \\ \text{FDC} = fdc. \end{cases}$

On prouveroit de même que $\begin{cases} \text{CDG} = cdg \\ \text{GDB} = gdb. \end{cases}$

On a d'ailleurs (conſtruction) BDA = *bdh*.

On voit donc, en ſuivant ces égalités, que dans les triangles ABC, *adh* égaux par la conſtruction,

La partie ADE eſt égale à la partie correſpondante *ade*.

La partie EDF eſt égale à la partie correſpondante *edf*.

En ajoutant les membres correſpondans de la 3e & de la 4e égalité, on aura :

La partie FDGC égale à la partie correſpondante *fdg*.

Enfin en ajoutant les membres correſpondans de la 5e & de la 6e égalité, on aura :

La partie GBAD égale à la partie correſpondante *gdh*.

Or l'on a fait *ade* : *edf* : *fdg* : *gdh* :: PR : RS : ST : TV.

On aura donc auſſi . . . . . .

ADE : EDF : FDGC : GBAD :: PR : RS : ST : TV.

REMARQUE.

241, 459. Si l'on propoſoit de diviſer le triangle ABC en un nombre déterminé de parties égales, par des

droites menées par le point donné D dans ſa ſurface :

On diviſeroit (n°. 457) le triangle *adh* égal au triangle ABC, en un même nombre de parties égales, par des droites menées du ſommet *d* ſur la baſe *ah*, & l'on acheveroit la conſtruction que l'on vient de preſcrire.

SECTION II.

Le changement, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des figures rectilignes quelconques.

PROBLÊME I.

460. *CHANGER une figure rectiligne* ABCDEF *en une autre de même ſurface, & qui ait un côté de moins.* Fig. 2.

SOLUTION.

Si l'on veut, par exemple, ſubſtituer aux deux côtés de l'angle F un côté unique, on tirera une droite EA par les extrêmités E, A des côtés de cet angle F; on menera enſuite par le ſommet de ce même angle F une droite FH parallele à la droite EA, & terminée en H à la rencontre du côté AB prolongé, s'il eſt néceſſaire; enfin on tirera du point E au point H la droite EH.

Cette conſtruction donnera la figure HBCDE qui aura évidemment un côté de moins que la propoſée ABCDEF, & qui aura même ſurface que cette propoſée.

Car la propoſée ABCDEF, & la conſtruite HBCDE ont la partie commune ABCDE; & le triangle AFE qui acheve la propoſée, eſt encore égal au triangle

AHE qui acheve la conſtruite, puiſque (n°. 2
ces deux triangles ſont faits ſur la même baſe AE
que leurs ſommets F, H ſont ſur la même paral
HF.

PROBLÊME II.

244. 461. *Changer une figure rectiligne quelconque* ABCI *en un triangle de même ſurface.*

SOLUTION.

Le problême ſe réduit évidemment à changer ſ
ceſſivement la figure propoſée en une autre de mê
ſurface qui ait un côté de moins, juſqu'à ce qu'
n'ait plus que trois côtés.

Ainſi ayant changé d'abord l'exagone ABCD
dans le pentagone HBDCE de même ſurface,
ſubſtituant aux deux côtés de l'angle F le côté uni
EH; on changera enſuite le pentagone HBCDE
un quadrilatere de même ſurface, en ſubſtituant,
exemple, aux deux côtés de l'angle C un côté u
que. Ce que l'on exécutera ainſi :

On menera la droite DB par les extrêmités D
des côtés de l'angle C; on menera par le ſommet
ce même angle C la droite CI parallele à la dro
DB, & terminée en un point I du côté AB prolon
s'il eſt néceſſaire; enfin par le point D & le point
on tirera la droite DI.

On aura, par cette ſeconde opération, le quadri
tere HIDE égal au pentagone HBCDE, à ca
de la partie HBDE commune à ces deux figures,
des triangles BID, BCD de même baſe BD, &
même hauteur, les ſommets I & C de ces triangl
étant ſur la même parallele CI (n°. 219).

On changera enfin le quadrilatere HIDE en
triangle de même ſurface, en ſubſtituant, par exe

plé, aux côtés ED & DI un côté unique. Ce que l'on exécutera de cette ſorte :

Ayant mené la diagonale EI, on menera à cette diagonale, par le ſommet de l'angle D, une parallele DM terminée à un point M du prolongement du côté AB, & l'on tirera la droite EM.

Cette troiſieme opération donnera le triangle HEM égal au quadrilatere HIDE, à cauſe de la partie HEI qui eſt commune à ces deux figures, & des triangles FDI, EMI évidemment égaux, puiſqu'ils ſont faits ſur la même baſe EI, & que leurs ſommets M, D, ſont ſur la même droite DM parallele à la baſe EI.

Et comme l'on a trouvé le quadrilatere HIDE égal au pentagone HBCDE, & ce pentagone égal à la figure propoſée ABCDEF, on conclurra que le triangle HEM eſt égal à la figure propoſée ABCDEF.

PROBLÊME III.

462. *Faire un triangle d'une hauteur donnée égal à une figure rectiligne quelconque propoſée.*

SOLUTION.

On changera (n°. 461) la figure rectiligne propoſée en un triangle de même ſurface ; puis on changera (n°. 448) ce triangle en un autre de même ſurface, & dont la hauteur ſoit égale à la hauteur donnée.

PROBLÊME IV.

403. *Exprimer par des lignes droites les rapports de pluſieurs figures rectilignes propoſées.*

SOLUTION.

On changera (n°. 461) les figures rectilignes propoſées en autant de triangles de même ſurface que

ces figures; on exprimera enſuite (n°. 461) par des lignes droites les rapports de ces triangles.

PROBLÊME V.

464. *Faire un triangle égal à la ſomme de tant de figures rectilignes que l'on voudra.*

SOLUTION.

On changera (n°. 461) les figures rectilignes propoſées en autant de triangles de même ſurface qu'elles; on fera enſuite (n°. 452) un triangle égal à la ſomme de tous ces triangles.

PROBLÊME VI.

465. *Faire un triangle égal à la différence de deux figures rectilignes propoſées.*

SOLUTION.

On changera (n°. 461) les deux figures rectilignes propoſées en triangle de même ſurface qu'elles; on fera enſuite un triangle égal à la différence de ces deux triangles (n°. 453).

PROBLÊME VII.

466. *Faire un triangle qui ſoit un multiple ou un ſous-multiple déterminé d'une figure rectiligne quelconque propoſée.*

SOLUTION.

On changera la figure rectiligne propoſée (n°. 461) en un triangle de même ſurface; on fera enſuite (n°. 455) un triangle qui ſoit à l'égard du triangle dans lequel on aura changé la figure rectiligne, le multiple ou le ſous-multiple demandé.

PROBLÊME VIII.

467. *Diviſer une figure rectiligne quelconque* ABCDE *par des droites menées par un point donné* O *dans ſa ſurface, en des parties proportionnelles aux ſegmens* AF, FG, GH, HI, IM, MN, NX *d'une droite* AX *donnée.* Fig. 24, 246, 24

SOLUTION.

On menera du point donné O des droites OA, OB, OC, OD, OE aux ſommets des angles du poligone ABCDE qui ſe trouvera diviſé dans les triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOA; on fera enſuite les autres opérations que l'on a preſcrites pour la diviſion du triangle, par des droites menées par un point donné dans ſa ſurface (n°. 458).

C'eſt-à-dire, que 1°. on fera (n°. 448) les triangles *aob, boc, cod, doe, eox* de même hauteur, & égaux aux triangles AOB, BOC, COD, DOE, EOA chacun à chacun; l'on mettra bout à bout & en ligne droite les baſes *ab, bc, cd, de, ex* des triangles *aob, boc, cod, doe, eox*, & leur ſommet au même point O, pour avoir le triangle *aox* égal à leur ſomme (n°. 452), & par conſéquent égal au poligone ABCDE propoſé.

2°. On diviſera (n°. 456) le triangle total *aox* par des droites menées du ſommet O à la baſe *ax*, en des parties *aof, fog, goh, hoi, iom, mon, nox*, proportionnelles aux ſegmens AF, FG, GH, HI, IM, MN, NX de la droite donnée AX.

3°. On diviſera (n°. 456) les triangles AOB, BOC, COD, DOE par les droites OF, OG, OH, OI, OM, ON menées du point donné O ſur les baſes de ces triangles, en des parties proportionnelles aux ſegmens des baſes *ab, bc, cd, de* des triangles correſpondans *aob, boc, cod, doe.*

Et l'on aura le poligone ABCDE diviſé par le côté AO du premier triangle AOB, & par les droites OF, OG, OH, OI, OM, ON, en des parties AOF, FOGB, GOH, HOIC, IOM, MOND, NOAE proportionnelles aux ſegmens AF, FG, GH, HI, IM, MN, NX de la droite donnée AX; enſorte que l'on aura AOF : FOGB : GOH : HOIC : IOM : MOND : NOAE :: AF : FG : GH : HI : IM : MN : NX.

La démonſtration en eſt la même que celle que l'on a donnée dans la ſolution du problême (n°. 458).

REMARQUE.

245, 468. Si on propoſoit de diviſer le poligone ABCDE en un nombre déterminé de parties égales, toujours par des droites menées par un point O donné dans la ſurface de ce poligone, on diviſeroit en un même nombre de parties égales le triangle *aox*, par des droites menées du ſommet O à la baſe *ax*, & on acheveroit comme on vient de le dire.

PROBLÊME IX.

248, 250. 469. *Diviſer une figure rectiligne quelconque* ABEFG *par des droites qui paſſent par un point donné* D *ſur l'un des côtés de ce poligone, en des parties proportionnelles aux ſegmens* AP, PQ, QR, RM *d'une droite* AM *donnée.*

SOLUTION.

On menera du point donné D des droites DB, DE, DF aux ſommets des angles B, E, F du poligone propoſé ABEFG; on fera enſuite les autres opérations que l'on a preſcrites dans la ſolution du problême précédent (n°. 467).

SECTION III.

L'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion des figures ſemblables.

PROBLÊME PREMIER.

470. *TROUVER le côté d'un quarré égal à la ſomme de pluſieurs quarrés donnés.*

SOLUTION.

On ſait (n°. 304) que dans tout triangle rectangle le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit.

Donc pour avoir le côté d'un quarré égal à la ſomme, par exemple, de trois quarrés qui auroient pour côtés, le premier la ligne AB, le ſecond la ligne BC, & le troiſieme la ligne CD, on mettra à angles droits les côtés AB, BC des deux premiers quarrés, & l'on tirera l'hypothénuſe AC; on mettra enſuite le côté CD du troiſieme quarré à angle droit, avec l'hypothénuſe AC à ſon extrêmité C, & l'on tirera la ſeconde hypothénuſe AD, qui ſera le côté du quarré égal à la ſomme des trois quarrés propoſés. *Fig.* 251 252.

C'eſt-à-dire, que l'on aura $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$; ce qui eſt évident : car dans le triangle rectangle ACD on a (n°. 304) . . . . $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$.

Mais dans le triangle rectangle ABC on a . . . $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Donc . . . . $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$.

Que ſi on vouloit ajouter un quatrieme quarré, on mettroit ſon côté à angle droit à l'extrêmité de la ſe-

conde hypothénuſe AD, *ſur cette ſeconde hypothénuſe; & l'on tireroit une troiſieme hypothénuſe qui ſeroit le côté du quarré égal à la ſomme des quatre quarrés propoſés.*

PROBLÊME II.

471. *Trouver le côté du quarré égal à la différence de deux quarrés donnés.*

SOLUTION.

Dans tout triangle rectangle le quarré fait ſur l'un des côtés de l'angle droit, eſt égal à la différence des quarrés de l'hypothénuſe, & de l'autre côté de l'angle droit (n°. 305).

(253) Donc pour avoir le côté du quarré égal à la différence de deux quarrés qui auroient pour côtés, l'un la ligne AB, & l'autre la ligne AC.

On commencera par faire un angle droit XBZ, dont les côtés ſoient indéfinis; ayant enſuite pris ſur le côté BX, à commencer du ſommet B de l'angle droit, une partie BA égale au côté AB du quarré qui doit être ſouſtrait; on décrira de l'extrêmité A comme centre, & avec un rayon égal au côté AC du plus grand quarré, l'arc *fcg* qui coupera en un point C le côté BZ de l'angle droit, & l'on menera l'hypothénuſe AC.

Cette conſtruction donnera le triangle rectangle ABC, dont l'hypothénuſe eſt égale au côté AC du plus grand quarré, & dont l'un AB des côtés de l'angle droit eſt égal au côté AB du quarré à ſouſtraire; par conſéquent le quarré que l'on fera ſur le côté BC de l'angle droit, ſera la différence des quarrés propoſés.

Cela eſt évident, puiſque dans le triangle ABC, l'on a (n°. 305) . . . . $\overline{BC}^2 + \overline{AB}$

PRO-

PROBLÊME III.

472. *Etant donnés les côtés homologues de tant de figures ſemblables que l'on voudra, trouver le côté homologue d'une figure ſemblable égale à leur ſomme.*

SOLUTION.

Lorſque l'on prend les trois côtés d'un triangle rectangle pour les côtés homologues de trois figures ſemblables, la figure faite ſur l'hypothénuſe eſt égale à la ſomme des deux autres figures (n°. 429).

Donc étant donnés les côtés homologues AB, BC, CD, &c. d'autant de figures ſemblables, on mettra à angle droit les côtés AB, BC des deux premieres figures, & l'on tirera l'hypothénuſe AC, cette hypothénuſe AC ſera le côté homologue d'une figure ſemblable égale à la ſomme des figures ſemblables faites ſur les lignes AB, BC conſidérées comme côtés homologues au côté AC. *Fig.* 252.

On mettra enſuite à angle droit l'hypothénuſe AC, & le côté CD de la troiſieme figure, & l'on menera l'hypothénuſe AD; cette ſeconde hypothénuſe AD ſera le côté homologue de la figure ſemblable égale à la ſomme des figures ſemblables faites ſur l'hypothénuſe AC & ſur le côté CD, conſidérés comme homologues à AD; & par conſéquent l'hypothénuſe AD ſera le côté homologue de la figure ſemblable égale à la ſomme des figures ſemblables faites ſur les lignes AB, BC, CD, conſidérées comme côtés homologues au côté AD; puiſque l'on vient de voir que la figure [illegible] pothénuſe AC eſt déja égale à la ſomme [illegible] ſemblables faites ſur les droites AB, [illegible] comme côtés homologues au côté A[illegible]

Et ai[illegible]

En général les figures ſemblables étant entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, il eſt évident que chercher le côté homologue d'une figure ſemblable à pluſieurs figures ſemblables données, & dont la ſurface ſoit égale à la ſomme des ſurfaces de ces figures, c'eſt chercher le côté d'un quarré égal à la ſomme des quarrés des côtés homologues des figures ſemblables données : or le problême a été réſolu (n°. 470).

PROBLÊME IV.

153, 473. *Etant donnés les côtés homologues* AB, AC *de deux figures ſemblables, trouver le côté homologue d'une figure ſemblable égale à leur différence.*

SOLUTION.

Parce que les figures ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, il eſt évident qu'étant donnés les côtés homologues AB, AC de deux figures ſemblables, on aura le côté homologue d'une figure ſemblable égale à leur différence, en cherchant (n°. 471) le côté du quarré égal à la différence des quarrés des côtés homologues AB, AC.

PROBLÊME V.

155, 474. *Une figure* D *étant donnée, en faire une qui lui ſoit ſemblable, & avec laquelle la figure* D *donnée ſoit dans le rapport de l'un* AB *de ſes côtés à une droite* BC *donnée.*

SOLUTION.

Lorſque trois lignes droites ſont en proportion géométrique continues, & que les deux premieres ſont les côtés homologues de deux figures ſemblables, la figure faite ſur la premiere de ces trois droites eſt à la

figure faite ſur la ſeconde, comme la premiere droite eſt à la troiſieme (n°. 428).

Donc pour avoir une figure ſemblable à la figure D, avec laquelle cette figure D donnée ſoit dans le rapport de l'un AB de ſes côtés à la droite BC donnée, on prendra une moyenne proportionnelle BD entre le côté AB & la droite BC donnée (n°. 375); on fera (nos 356, 357) enſuite ſur cette moyenne proportionnelle BD, conſidérée comme côté homologue au côté AB, une figure ſemblable à la figure donnée D. Fig. 2

Nommant X la figure que l'on aura conſtruite ſur BD, l'on aura . . . D : X :: AB : BC, puiſque l'on aura fait . . . AB : BD :: BD : BC.

Enſorte que ſi le côté AB eſt la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. ou le double, ou le triple, ou le quadruple, &c. de la droite BC donnée, la figure propoſée D ſera la moitié, ou le tiers, ou le quart, &c. ou le double, ou le triple, ou le quadruple, &c. de la figure ſemblable que l'on aura faite ſur la moyenne proportionnelle BD.

REMARQUE.

475. Comme les cercles ſont des figures ſemblables (n°. 275), il eſt évident que ſi l'on demandoit un cercle avec lequel un cercle donné fût dans le rapport de ſon rayon AB à une droite donnée BC, il faudroit prendre une moyenne proportionnelle BD entre le rayon AB du cercle donné, & la droite donnée BC; le cercle que l'on décriroit avec un rayon égal à la moyenne proportionnelle BD, ſeroit le cercle demandé. Fig. 25 257.

PROBLÊME VI.

476. *Une figure* D *étant donnée, faire une figure ſemblable qui en ſoit un multiple ou ſous-multiple dé-* Fig. 25 256, 25

terminé ; c'eſt-à-dire, qui contienne la figure donnée ou y ſoit contenue un certain nombre de fois.

SOLUTION.

On prendra une droite BC qui contienne l'u quelconque AB des côtés de la figure donnée, ou qu y ſoit contenue autant de fois que la figure deman dée doit contenir la figure propoſée D, ou y être con tenue; & alors le problême ſe réduira au précéden (n°. 474); c'eſt-à-dire, à faire une figure ſemblable à la figure donnée D, avec laquelle cette figure don née ſoit dans le rapport de ſon côté AB à la droit BC.

PROBLÊME VII.

Fig. 258, 259, 260. 477. *Une figure* D *étant donnée, faire une figur ſemblable avec laquelle la figure propoſée ſoit dans l rapport de deux droites* fh, gl *données.*

SOLUTION.

On prendra (n°. 349) une quatrieme proportion nelle BC aux deux droites *fh*, *gl* données, & à l'u quelconque AB des côtés de la figure D donnée.

Et parce que dans la proportion *fh* : *gl* :: AB : BC le ſecond rapport eſt égal au premier, le problêm ſe réduira à faire (n°. 474) une figure ſemblable à l figure donnée D, avec laquelle la figure donnée l ſoit dans le rapport de ſon côté AB à la quatrien proportionnelle BC.

PROBLÊME VIII.

478. *Exprimer par des lignes droites le rapport d tant de figures ſemblables que l'on voudra.*

SOLUTION.

On a vu (n°. 434) que ſi d'un même point que

conque de la circonférence du cercle, on tire un diametre & tant de cordes que l'on voudra, & que des extrêmités de ces cordes on abaiſſe des ordonnées ſur le diametre, les figures ſemblables faites ſur ce diametre & ſur ces cordes conſidérées comme des côtés homologues, ſont entr'elles comme le diametre & les abſciſſes compriſes entre l'origine commune de ces cordes, & les ordonnées.

Ainſi étant donnés les côtés homologues AB, AC, AD, AE d'autant de figures ſemblables, on décrira une demi-circonférence X ſur une droite AB égale au côté AB de la plus grande des figures propoſées; de l'extrêmité A du diametre AB, on menera les cordes AC, AD, AE égales aux côtés homologues AC, AD, AE des autres figures; enfin on abaiſſera des extrêmités C, D, E de ces cordes les ordonnées CH, DI, EL; & le rapport des figures ſemblables faites ſur les côtés homologues AB, AC, AD, AE, ſera exprimé par le diametre AB, & les abſciſſes correſpondantes AH, AI, AL. *Fig.* 261 262.

REMARQUE.

479. Si les droites AB, AC, AD, AE repréſentent les diametres d'autant de cercles, comme les cercles ſont des figures ſemblables (n°. 275), dans leſquelles les diametres ſont des lignes homologues (n°. 293), il eſt viſible que l'on pourra, en appliquant la ſolution du problême précédent, exprimer par des lignes droites le rapport de tant de cercles que l'on voudra, dont on aura les diametres AB, AC, AD, &c. *Fig.* 261 262.

PROBLÊME IX.

480. *Une figure* D *étant donnée, faire des figures ſemblables, égales enſemble à cette figure, & proportion-* *Fig.* 263 264, 265.

nelles aux ſegmens RS, ST, TV *d'une droite* RV *donnée.*

SOLUTION.

On tirera une droite AB égale à l'un AB des côtés de la figure D donnée, & l'on diviſera (n°. 351) cette droite dans les ſegmens AC, CD, DB proportionnels aux ſegmens RS, ST, TV de la droite RV donnée.

On décrira enſuite le demi-cercle X ſur la droite AB; on portera le ſegment CD de A en *d*, & le ſegment DB de A en *b*, pour qu'ils commencent tous à la même extrêmité A du diametre AB; on élevera aux points *b*, *d*, *c* les ordonnées *b*G, *d*F, CE; & l'on menera les cordes AE, AF, AG de l'extrêmité A du diametre, aux extrêmités E, F, G des ordonnées.

Enfin on fera (n°. 356) ſur les cordes AE, AF, AG, conſidérées comme côtés homologues au côté AB des figures ſemblables à la figure D donnée, & ces figures ſeront les figures demandées.

Il eſt d'abord évident que les figures ſemblables faites ſur les cordes AE, AF, AG conſidérées comme côtés homologues, ſont proportionnelles aux ſegmens de la droite RV; car elles ſont (n°. 434) proportionnelles aux abſciſſes AC, A*d*, A*b*, ou aux ſegmens AC, CD, DB du diametre AB, parce que . . . A*d* = CD, & A*b* = DB (conſtruction).

Or les ſegmens AC, CD, DB du diametre AB ſont proportionnels, par la conſtruction, aux ſegmens RS, ST, TV de la droite RV. Donc, &c.

Ces mêmes figures faites ſur les cordes AE, AF, AG conſidérées comme des côtés homologues, ſont auſſi égales enſemble à la figure donnée D; car la figure D donnée & les figures ſemblables conſtruites étant entr'elles (n°. 434) comme le diametre AB &

les ſegmens AC, CD, DB de ce diametre, il eſt viſible qu'il y a même rapport entre la figure D donnée & la ſomme des figures conſtruites, qu'entre le diametre AB & la ſomme AC + CD + DB de ſes ſegmens.

Or le diametre AB eſt égal à la ſomme de ſes ſegmens. Donc, &c.

REMARQUE.

Un cercle d'un diametre AB étant donné, on déterminera les diametres des cercles proportionnels aux ſegmens RS, ST, TV d'une droite donnée RV, & égaux enſemble au cercle donné, en coupant le diametre AB du cercle donné en ſegmens proportionnels aux ſegmens de la droite RV, & en faiſant le reſte de la conſtruction que l'on vient de preſcrire dans le problême précédent (n°. 480). *Fig.* 265.

PROBLÊME X.

481. *Deux triangles* X, Z *étant donnés, faire un triangle égal au triangle* Z, *& ſemblable au triangle* X. *Fig.* 267,

SOLUTION.

1°. Si les triangles donnés X, Z ſont de même hauteur, ils ſont entr'eux comme leurs baſes AB, CD (n°. 419); ainſi ſi l'on veut qu'un troiſieme triangle ſoit égal au triangle Z, & ſemblable au triangle X, le problême ſe réduira à faire (n°. 474) un triangle Y ſemblable au triangle X, & avec lequel ce triangle X ſoit dans le rapport de la baſe AB à la baſe CD.

Car ſi on fait . . . . X : Y :: AB : CD,
comme l'on a d'ailleurs à cauſe
de la même hauteur . . . X : Z :: AB : CD,
on aura (245) . . . . . Z : Y :: X : X.
D'où l'on tirera (n°. 244) Y = Z, parce que X = X.

C'eſt-à-dire, que le triangle Y que l'on aura fait ſemblable au triangle X, & de façon que le triangle X ſoit au triangle Y comme AB : CD, ſera égal au triangle Z.

2°. Si les triangles donnés ont des hauteurs inégales, on changera (n°. 448) le ſecond en un triangle Z de même hauteur que le triangle X; puis on cherchera un triangle Y ſemblable au triangle X, & avec lequel le triangle X ſoit dans le rapport des baſes AB, CD des triangles X, Z de même hauteur.

PROBLÊME XI.

269, 271. 482. *Faire une figure rectiligne de même ſurface que le triangle* Z *donné, & qui ſoit ſemblable à une figure rectiligne* ABCDE *donnée.*

SOLUTION.

On changera (n°. 461) le poligone ABCDE donné en un triangle ABF qui ait un côté AB commun avec cette figure.

On fera enſuite (n°. 481) le triangle *abf* ſemblable au triangle ABF, & égal au triangle Z donné.

On fera enfin (n°s 356, 357) ſur le côté *ab* du triangle *abf*, conſidéré comme homologue au côté AB, le poligone *abcde* ſemblable au poligone ABCDE propoſé.

Ce poligone *abcde* ſera ſemblable, par la conſtruction, au poligone ABCDE donné, & il ſera de plus égal au triangle Z.

Car les poligones *abcde*, ABCDE étant ſemblables, & ayant pour côtés homologues les côtés *ab*, AB, on a (n°. 423) . . . ABCDE : *abcde* :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$.

Les triangles ABF, *abf* étant auſſi ſemblables, & ayant pour côtés homologues les côtés AB, *ab*, l'on a (n°. 423) . . . ABF : *abf* :: $\overline{AB}^2$: $\overline{ab}^2$.

ır conſéquent (n°. 245) ABCDE : *abcde* :: ABF : *abf*.
Mais l'on a fait . . . . ABF = ABCDE.
Donc (n°. 244) . . . . . *abcde* = *abf*.
L'on a fait encore . . . . . *abf* = Z.
Donc . . . . . *abcde* = Z.
C'eſt-à-dire, que le poligone *abcde* eſt ſemblable
à poligone propoſé ABCDE, & en même tems de
même ſurface que le triangle Z donné.

PROBLÊME XII.

483. *Changer une figure rectiligne quelconque propoſée en une figure ſemblable à une figure donnée.*

SOLUTION.

On changera (n°. 461) la figure rectiligne propoſée
en un triangle de même ſurface ; l'on fera enſuite
(n°. 482) une figure rectiligne qui ſoit égale à ce
triangle, & ſemblable à la figure rectiligne donnée.

CHAPITRE DIXIEME

Les lignes droites conſidérées dans leurs poſitions à l'égard des plans, & les plans conſidérés dans leurs poſitions les uns à l'égard des autres.

DÉFINITIONS.

484. Le *plan*, comme on l'a déja dit (n°. 13), est une ſurface ſur laquelle une ligne droite peut s'ajuſter en tous ſens.

Une ligne droite eſt dite *dans un plan*, lorſque toutes ſes parties ſont dans ce plan, ou dans ſon prolongement.

485. Une ligne droite eſt dite *perpendiculaire ſur un plan*, lorſqu'elle ne penche d'aucun côté ſur ce plan, ou lorſqu'elle eſt perpendiculaire ſur toutes les lignes de ce plan, qui paſſent par ſon pied.

486. Une droite eſt dite *oblique ſur un plan*, lorſqu'elle penche de quelque côté ſur ce plan.

487. Elle eſt dite *parallele à un plan*, lorſqu'étant hors de ce plan, elle eſt parallele à quelqu'une des droites qui compoſent ce plan.

488. On nomme *commune ſection de deux plans* la ligne le long de laquelle deux plans ſe coupent ou ſe rencontrent.

489. Un plan eſt dit *perpendiculaire ſur un autre plan*, lorſque le premier tombe ſur le ſecond, ſans pencher d'aucun côté.

490. Un plan eſt dit *oblique à un autre*, lorſque le premier tombe ſur le ſecond en penchant plus d'un côté que de l'autre.

491. Deux plans ſont dits *paralleles*, lorſque tous s points du premier ſont à égale diſtance du ſecond.

492. *L'angle d'inclinaiſon* d'une ligne ſur un plan, t le plus petit de tous les angles que cette ligne fait rec les lignes du plan, qui paſſent par ſon pied.

493. *L'angle plan*, c'eſt l'angle formé par la rencontre de deux plans.

SECTION PREMIERE.

Les lignes droites conſidérées dans leurs poſitions à l'égard des plans.

PROPOSITION I.

494. *Si deux points* A, B *d'une droite* AZ, *ſont dans n plan* X, *toute cette droite, même prolongée à l'ini, ſera dans ce plan auſſi prolongé à l'infini.*

DÉMONSTRATION.

On peut tirer en tous ſens ſur un plan des lignes droites, & même des lignes droites infinies ſi ce plan eſt prolongé à l'infini (n°. 484). Fig. 272.

Donc on pourra tirer une droite ſur le plan X entre les points A & B, & cette droite AB, même prolongée à l'infini, ſera dans le plan X auſſi prolongée à l'infini.

Mais la droite indéfinie AZ ayant deux points AB communs avec la ligne AB tirée dans le plan X, ſe confond avec cette ligne (n°. 38).

Donc cette ligne AZ, même prolongée à l'infini, [illegible] toute entiere dans le plan X auſſi prolongé à l'in-

[illegible] *voit démontrer.*

PROPOSITION II.

Fig. 273. 495. *Deux lignes droites* AB, CD *qui ſe coup ſont dans un même plan, & déterminent la poſitio ce plan.*

DÉMONSTRATION.

1°. Si ayant tiré une droite AZ par les extrêm A, D des droites AB, CD, on fait mouvoir droite XZ parallélement à elle-même, le long droite AB, pour engendrer le plan XZ, ZX.

Ce plan renfermera d'abord la ligne AB le de laquelle la droite XZ s'eſt mûe; la ligne aura auſſi deux points dans ce plan; à ſavoir, for trêmité D, & le point O auquel elle coupe la d AB, & par conſéquent elle ſera toute entiere ce plan (n°. 494).

Donc deux droites AB, CD qui ſe coupent, dans un même plan.

Ce qu'il falloit 1°. démontrer.

2°. Que l'on faſſe paſſer par les points A, D autre droite XZ, & que l'on répete tant que voudra, le mouvement parallele de cette ligne, le de la droite AB, il eſt évident qu'elle parcourra jours le même chemin, & qu'elle engendrera le me plan XZZX qui contiendra les lignes AB, qui ſe coupent.

Donc il ne peut paſſer qu'un ſeul plan par deu gnes AB, CD qui ſe coupent, & par conſéquen deux lignes déterminent la poſition du plan qu renferme. C. Q. F. 2°. D.

PROPOSITION III.

Fig. 274. 496. *Une droite* PD *eſt perpendiculaire à un pla lorſqu'elle eſt perpendiculaire à deux droites* AB,

menées dans ce plan par ſon pied P : *Et d'un même point pris ſur un plan ; ou d'un même point* D *pris hors d'un plan, on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire à ce plan.*

DE'MONSTRATION de la premiere Partie.

Savoir, qu'une droite PD *eſt perpendiculaire à un plan* X, *lorſqu'elle eſt perpendiculaire à deux lignes* AB, CM, *qui paſſent par ſon pied* P. *Fig.* 274

La poſition du plan X dépend de la poſition des deux droites AB, CM de ce plan, qui ſe coupent au point P (n°. 495).

Mais en ſuppoſant la ligne PD perpendiculaire ſur les deux droites AB, CM, ces lignes ne penchent d'aucun côté ſur cette droite PD (n°. 62).

Donc le plan X ne penche d'aucun côté par rapport à cette droite PD ; donc cette ligne PD eſt perpendiculaire par rapport à toutes les lignes du plan X qui paſſent par ſon pied P, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur ce plan X.

DE'MONSTRATION de la ſeconde Partie.

Savoir, que d'un même point P, *pris ſur un plan* X, *on ne peut mener qu'une ſeule perpendiculaire à ce plan.* *Fig* 27

Ayant élevé du point P la perpendiculaire PD au plan X, s'il eſt poſſible d'élever du même point P une ſeconde perpendiculaire PC à ce plan, comme on peut faire paſſer un plan Z par les droites PD, PC (n°. 495), lequel coupera le plan X dans une droite PB, on aura dans un même plan Z deux perpendiculaires PD, PC, menées ſur une ligne PB par un même point P ; ce qui eſt impoſſible (n°. 72). Donc, &c.

DE'MONSTRATION de la troiſieme Partie.

Savoir, que d'un [illegible] pris en-dehors d'un *Fig.* 2

plan X, *on ne peut abaiſſer qu'une ſeule perpendiculaire ſur ce plan.*

Ayant abaiſſé du point D la perpendiculaire DP ſur le plan X, s'il étoit poſſible d'abaiſſer du même point D une ſeconde perpendiculaire AD ſur le même plan X, comme on peut faire paſſer un plan Y par les droites AD, DP (n°. 495), lequel coupera le plan X dans une droite AP, on auroit dans un même plan Y deux perpendiculaires DP, DA abaiſſées ſur une droite AP du même point D; ce qui eſt impoſſible (n°. 81). Donc, &c.

PROPOSITION IV.

ig. 276. 497. *De l'extrêmité* B *d'une droite* OB *oblique à un plan* X, *ayant abaiſſé une perpendiculaire* BP *ſur ce plan, ſi l'on joint le pied* O *de l'oblique, & celui* P *de la perpendiculaire par une droite* OP, *l'angle* BOP *que ſera l'oblique avec cette droite* OP, *ſera l'angle d'inclinaiſon de cette oblique ſur le plan* X.

ig. 277. *Si de plus on mene dans le plan* X *une perpendiculaire* DC *à cette droite* OP, *par le pied* O *de l'oblique, cette oblique ſera perpendiculaire à cette droite* DC.

Et cette droite DC *ſera la ſeule droite du plan* X, *ſur laquelle l'oblique* OB *ſoit perpendiculaire.*

DÉMONSTRATION *de la premiere Partie.*

ig. 276. *Savoir, que l'angle* BOP *eſt le plus petit des angles que fait l'oblique* OB *ſur le plan* X, *& qu'il eſt par conſéquent l'angle d'inclinaiſon de l'oblique* OB *ſur le plan* (n°. 492).

Du pied O de l'oblique comme [illegible], & avec rayon OP, on décrira une circonférence le rayon quelconque OC, différent avec l'oblique OB un angle quelconque tirera du point C aux points de

Et l'on conſidérera que la ligne BP étant perpen-
ulaire ſur le plan X, eſt perpendiculaire ſur la
ite PC qui paſſe par ſon pied (n°. 485); & par
nſéquent dans le triangle rectangle BPC, l'hypo-
nuſe BC eſt plus grande que le côté BP (n°. 145).
Mais dans les deux triangles BOP, BOC, le côté
O eſt commun, & les côtés OP, OC ſont, par la
nſtruction, des rayons d'un même cercle (n°. 44).
Donc l'angle BOP, oppoſé à la plus petite baſe
P, eſt plus petit que l'angle BOC oppoſé à la plus
nde baſe BC (n°. 57).
Donc l'angle BOP que fait l'oblique OB avec la
ite OP menée de ſon pied O au pied de la per-
ndiculaire, eſt le plus petit angle que faſſe cette
lique ſur le plan X, & par conſéquent il eſt l'angle
nclinaiſon de cette oblique ſur le plan X.

DE'MONSTRATION de la ſeconde Partie.

Savoir, que l'oblique OB *eſt perpendiculaire à la li-* *Fig. 177.*
ne CD *menée par ſon pied* O *perpendiculairement à*
la droite OP, *qui joint le pied* O *de l'oblique, & le*
pied P *de la perpendiculaire.*

L'on prendra de part & d'autre du point O, ſur la
roite CD, les parties égales OC, OD; l'on tirera
es points C, D, aux extrêmités P & B de la perpen-
iculaire, les droites DB, DP, CB, CP.

Et l'on conſidérera 1°. que les triangles POD,
OP ayant un angle droit compris entre un côté
mmun OP, & les côtés OC, OD, égaux par la
[redacted]ction, ſont entiérement égaux (n°. 58), & par
[redacted] on aura CP = DP.

[redacted]oite BP étant perpendiculaire ſur le plan
ndiculaire ſur les droites PC, PD qui
pied; ainſi on a dans les triangles
un angle droit compris entre un côté

commun BP, & les côtés DP, CP, que l'on vient de prouver égaux, & par conſéquent (n°. 55) on aura CB = DB.

Ainſi l'oblique OB aura deux points O, B à égale diſtance des points C, D de la droite CD, elle eſt de plus dans un même plan avec cette droite (n°. 495). Donc elle eſt perpendiculaire ſur cette droite (n°. 71).

DE'MONSTRATION de la troiſieme Partie.

ig. 277. *Savoir, que la ligne* CD *eſt la ſeule droite du plan* X *ſur laquelle l'oblique* OB *puiſſe être perpendiculaire.*

Car ſi l'oblique OB étoit perpendiculaire à une ſeconde ligne du plan X qui paſſe par ſon pied, elle ſeroit perpendiculaire à ce plan X (n°. 496); ce qui ſeroit contre la ſuppoſition.

PROPOSITION V.

ig. 278. 498. *Deux droites* AB, CD *paralleles ſont dans un même plan, & ſi l'une* AB *eſt perpendiculaire à un plan* X, *l'autre* CD *eſt auſſi perpendiculaire à ce même plan.*

DE'MONSTRATION de la premiere Partie.

Savoir, que les deux paralleles AB, CD *ſont dans un même plan.*

On tirera dans le plan X par les pieds A, C de ces deux paralleles la droite AC, & l'on imaginera que la droite AB ſe meut parallélement à elle-même le long de la ligne AC pour engendrer un plan Z.

Ce plan Z renfermera évidemment la ligne AB qui l'a engendré; il renfermera auſſi la ligne CD: car la ligne AB étant ſuppoſée au point A parallele à la ligne CD, & s'étant mûe parallélement à elle-même, il eſt viſible que pendant tout ſon mouvement elle a été parallele à la ligne CD; & par conſéquent arrivée

rivée au point C, elle s'eſt confondue avec ſa parallele CD, cette ligne CD ſera donc auſſi dans le plan Z. Donc, &c.

DE'MONSTRATION de la ſeconde Partie.

Savoir, que de deux paralleles AB, CD, *ſi l'une* AB *eſt perpendiculaire ſur un plan* X, *l'autre* CD *ſera auſſi perpendiculaire ſur ce plan.* Fig. 27

On vient de voir que ſi l'on fait mouvoir la droite AB parallélement à elle-même, le long de la ligne AC, elle ſe confondra avec ſa parallele CD, lorſqu'elle ſera arrivée au point C.

Donc la droite CD aura alors la même poſition à l'égard du plan X, que la droite AB.

Mais en ſuppoſant la droite AB perpendiculaire au point A ſur le plan X, comme elle s'eſt mûe parallélement à elle-même, elle a toujours fait les mêmes angles ſur le plan X, & par conſéquent elle eſt encore perpendiculaire ſur ce plan au point C; c'eſt-à-dire, lorſqu'elle eſt confondue avec la parallele CD.

Donc cette parallele CD ſera auſſi perpendiculaire ſur le plan X.

Donc de deux paralleles, ſi l'une eſt perpendiculaire à un plan, l'autre eſt auſſi perpendiculaire à ce plan.

PROPOSITION VI.

499. *Si deux droites* AB, CD *ſont perpendiculaires à un plan* X, *ces deux droites ſont dans un même plan, & de plus elles ſont paralleles.* Fig. 27

DÉMONSTRATION.

1°. Ayant mené dans le plan X par les pieds A, C de ces perpendiculaires la ligne AC, on fera mouvoir la perpendiculaire AB parallélement à elle-même

le long de cette droite AC, pour engendrer le plan Z.

Et l'on conſidérera que ce plan Z renferme, outre la ligne AB qui l'a engendré, la ſeconde perpendiculaire CD : car la perpendiculaire AB s'étant mûe parallélement à elle-même, elle ſera encore perpendiculaire au plan X, quand elle ſera arrivée au point C, & par conſéquent elle ſera confondue avec la perpendiculaire CD ; car ſi elle avoit une poſition CM différente de la ligne CD, l'on auroit deux perpendiculaires CD, CM élevées ſur le même plan X à un même point C ; ce qui eſt impoſſible (n°. 496).

Donc deux perpendiculaires AB, CD ſur un même plan X, ſont dans un même plan.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

2°. Deux lignes ſont paralleles lorſqu'étant dans un même plan, elles ſont perpendiculaires à une troiſieme ligne (n°. 91).

Or les droites AB, CD étant perpendiculaires ſur le plan X par la ſuppoſition, elles ſont perpendiculaires à la même droite AC qui joint leurs pieds (n°. 485) ; elles ſont de plus dans un même plan, comme on vient de le démontrer.

Donc deux perpendiculaires AB, CD ſur un même plan X, ſont paralleles.

Ce qu'il falloit 2°. *démontrer.*

SECTION II.

Les plans conſidérés dans leurs poſitions les uns à l'égard des autres.

PROPOSITION I.

500. *DEUX angles* ABC, abc *étant dans des plans différens, ſi chaque côté de l'un eſt parallele à chaque côté de l'autre, ces angles ſont égaux.*

DÉMONSTRATION.

Si ayant joint les ſommets B, *b* de ces angles ABC, *abc*, par la droite B*b*, on fait mouvoir le ſommet *b* le long de la ligne B*b*, les côtés AB & *ab*, BC, *bc* reſtant toujours paralleles, il eſt évident que le ſommet B étant arrivé ſur le ſommet *b*, le côté BA tombera ſur le côté *ba*, & le côté BC ſur le côté *bc*; ce qui montre que ces angles ABC, *abc* ſont égaux. Donc, &c. Fig. 19.

PROPOSITION II.

501. *Si dans deux plans* X, Z *qui ſe rencontrent, on mene deux perpendiculaires* OC, OD *à la ſection commune* AB *par un même point* O *de cette ſection, l'angle de ces deux plans aura même meſure que l'angle* COD *formé par ces deux perpendiculaires.*

Enſorte que ſi du centre O, *& de l'intervalle du rayon* OD, *on décrit un arc* CED *dans le plan de l'angle* COD, *il ſera la meſure de l'ouverture de ces plans.*

DÉMONSTRATION.

Qui conſidére [illegible] mune ſection AB étant Fig. 21

perpendiculaire aux deux lignes CO, OD qui ſont dans le plan du ſecteur COD, ce ſecteur eſt perpendiculaire à la commune ſection AB (n°. 496).

Par conſéquent ſi on fend le plan X ſelon la perpendiculaire OC à la commune ſection AB, & que le plan Z reſtant immobile, de même que le ſecteur COD, on faſſe tourner le plan X vers le plan Z ſur la ſection commune AB, comme ſur une charniere, la fente OC, & le ſecteur COD étant perpendiculaires à la commune ſection AB, au même point O, il eſt évident que dans tous les mouvemens du plan X la fente OC ſera dans le plan du ſecteur COD, que ſon extrêmité C parcourra ſucceſſivement les points de l'arc CED, & qu'elle les aura parcouru tous, lorſqu'elle ſera appliquée ſur le point D, ou lorſque le plan X ſera couché ſur le plan Z.

Or il eſt viſible, dans cette ſuppoſition, que l'arc CED meſurera la quantité dont le plan X aura tourné ſur la commune ſection AB, depuis ſa premiere poſition, juſqu'à ce qu'il aura été appliqué ſur le plan Z.

Donc ce même arc exprimoit, avant le mouvement, l'ouverture ou l'écartement de ces deux plans.

PROPOSITION III.

281. 502. *Un plan* X *eſt perpendiculaire ſur un plan* Z, *lorſqu'il renferme une droite* DP *perpendiculaire à ce plan* Z.

DÉMONSTRATION.

Soit menée dans le plan Z, par le pied P de la perpendiculaire DP, la droite AB perpendiculaire à la commune ſection EF des plans X, Z.

Puiſque la droite DP eſt perpendiculaire ſur le plan

Z ; elle fait des angles droits DPB, DPA avec la droite AB menée par ſon pied P (n°. 485).

Mais la droite DP dans le plan X, & la droite AB dans le plan Z, étant perpendiculaires ſur la commune ſection EF, & au même point P, les angles de ſuite DPA, DPB que font ces deux droites DP, AB, ſont les angles de ſuite que le plan X fait ſur le plan Z (n°. 501).

Donc le plan X fait de part & d'autre des angles droits ſur le plan Z, & par conſéquent il eſt perpendiculaire ſur ce plan (n°. 489).

Donc un plan X eſt perpendiculaire ſur un plan Z, lorſqu'il renferme une droite perpendiculaire ſur ce plan. C. Q. F. D.

PROPOSITION IV.

503. *La commune ſection* OB *de deux plans* Z, Y *perpendiculaires ſur un troiſieme plan* X, *eſt une droite perpendiculaire ſur ce plan.* Fig. 21.

DÉMONSTRATION.

Le plan Z étant perpendiculaire ſur le plan X, on peut au point O, où la ſection commune OB rencontre le plan X, élever dans ce plan Z une perpendiculaire ſur le plan X, & par la même raiſon on pourra au même point O élever dans le plan Y une perpendiculaire ſur le plan X (n°s 485, 489).

Mais d'un même point d'un plan, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire ſur ce plan (n°. 496).

Donc la perpendiculaire élevée au point O ſur le plan X, ſe trouve en même tems dans les plans Z, Y ; elle ſera par conſéquent la commune ſection de ces deux plans (n°. 488).

Donc la commune ſection de deux plans perpen-

diculaires ſur un troiſieme plan, eſt une droite perpendiculaire ſur ce plan. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

283. 504. *Si une droite* PD *eſt perpendiculaire à deux plans* X, Z, *ces deux plans ſeront paralleles.*

DE'MONSTRATION.

Ayant tiré dans le plan X des droites quelconques AB, OC qui ſe coupent au pied P de la perpendiculaire PD, on menera dans le plan Z par le point D de cette même perpendiculaire PB une droite *ab* qui ſoit dans un même plan avec la droite AB tirée dans le plan X, & une autre droite *oc* qui ſoit auſſi dans un même plan avec la droite OC.

La droite PD étant perpendiculaire ſur les deux plans X, Z, les droites AB, *ab* qui la rencontrent dans ces plans aux points P, D ſeront perpendiculaires ſur elle (n°. 485); & comme on ſuppoſe d'ailleurs ces lignes AB, *ab* dans un même plan, elles ſont par conſéquent paralleles (n°. 91).

Les deux lignes OC, *oc* ſeront auſſi perpendiculaires ſur la même droite PD, & comme elles ſont encore ſuppoſées dans un même plan, elles ſont auſſi paralleles.

Mais deux droites qui ſe coupent dans un plan déterminent la poſition de ce plan (n°. 495).

Donc les deux droites AB, OC qui ſe coupent dans le plan X, étant paralleles aux deux droites *ab*, *oc* qui ſe coupent dans le plan Z, ces deux plans X, Z ſont paralleles.

Donc ſi une droite eſt perpendiculaire à deux plans, ces deux plans ſont paralleles.

PROPOSITION VI.

505. *Lorſque deux plans paralleles* X, Z *ſont coupés ou terminés par un troiſième plan* Y, *les communes ſections* AB, CD *ſont paralleles.* Fig. 28.

DE'MONSTRATION.

Comme les deux ſections AB, CD ſont dans un même plan Y, il eſt évident que ſi elles n'étoient point paralleles, en les prolongeant du côté de leur moindre ouverture, elles ſe rencontreroient: les plans X, Y dans leſquels ces ſections ſont auſſi, ſe rencontreroient de même, & dès-lors ils ne ſeroient point paralleles; ce qui eſt contre la ſuppoſition.

PROPOSITION VII.

506. *Deux plans* X, Z *étant paralleles, une ligne* PD *qui ſera perpendiculaire à l'un* X *de ces plans, ſera auſſi perpendiculaire au plan* Z.

DÉMONSTRATION.

Ayant mené dans le plan X deux droites quelconques AB, OC qui ſe coupent au pied P de la perpendiculaire PD ſur ce plan, ſi on tire dans le plan Z, par l'extrêmité D de la droite PD, une droite *ab* qui ſoit dans un même plan avec la droite AB, & une droite *oc* qui ſoit dans un même plan avec la droite OC; Fig. 283

Comme les plans X, Z ſont ſuppoſés paralleles, les droites AB, *ab* que l'on ſuppoſe dans un même plan, terminé aux plans X, Z ſeront paralleles (n°. 505); & par conſéquent (n°. 510) la droite PD qui eſt par la ſuppoſition perpendiculaire au plan X, & dès-lors auſſi (n°. 485) à la droite AB qui paſſe par

ſon pied, ſera encore perpendiculaire ſur la droite *ab*.

Par les mêmes raiſons la droite PD ſera perpendiculaire ſur la droite *oc* menée dans le plan Z.

Donc PD eſt perpendiculaire ſur les deux lignes *ab*, *oc* qui ſe croiſent à ſon extrêmité dans le plan Z, & par conſéquent elle eſt perpendiculaire ſur le plan Z (n°. 496).

Donc deux plans étant paralleles, ſi une droite eſt perpendiculaire à l'un de ces plans, elle ſera auſſi perpendiculaire à l'autre.

PROBLÊMES.

PROBLÊME I.

507. *D'un point pris hors d'un plan* P, *abaiſſer une perpendiculaire ſur ce plan.*

SOLUTION.

285. Une droite perpendiculaire ſur deux lignes d'un plan, qui paſſent par ſon pied, eſt perpendiculaire ſur ce plan (n°. 496).

Donc étant donné le point O hors du plan P, pour abaiſſer de ce point une perpendiculaire ſur ce plan, on menera dans ce plan P une droite quelconque XZ, & ayant abaiſſé du point O une perpendiculaire OC ſur cette ligne, & mené dans le plan P du point C une autre perpendiculaire CD à la même droite XZ, on abaiſſera du point donné O ſur la droite CD la perpendiculaire OD qui ſera la perpendiculaire demandée.

Car les deux côtés CO, CD du triangle COD étant, par la conſtruction, perpendiculaires ſur la droite XZ, comme la poſition de ce triangle dépend de la poſition des deux lignes CO, CD (n°. 495), ce triangle eſt perpendiculaire ſur la droite XZ; &

on mene à cette droite XZ par le point D une parallele MN, ce triangle ſera encore perpendiculaire ur cette droite MN; car on a vu (n°. 498) que de eux lignes paralleles, ſi l'une eſt perpendiculaire ſur n plan, l'autre eſt de même perpendiculaire ſur ce lan. Donc la droite OD qui eſt un côté de ce trianle, eſt perpendiculaire au point D ſur cette droite MN; mais elle eſt encore, par la conſtruction, perpendiculaire ſur CD: donc la ligne OD eſt perpendiculaire ſur deux lignes du plan P, qui paſſent par ſon pied D: donc elle eſt perpendiculaire ſur ce plan P.

PROBLÊME II.

508. *D'un point pris ſur un plan, élever une perpendiculaire ſur ce plan.*

SOLUTION.

De deux paralleles, ſi l'une eſt perpendiculaire ſur un plan, l'autre ſera auſſi perpendiculaire à ce plan (n°. 498). *Fig.* 18.

Donc étant pris le point O ſur le plan P, pour élever à ce point ſur ce plan une perpendiculaire, on abaiſſera d'un point quelconque X, pris hors de ce plan, une perpendiculaire CX ſur ce plan (n°. 507); puis ayant mené la droite OX, on tirera du point O une droite OD qui ſoit dans un même plan avec les droites OX, CX, & qui faſſe avec OX l'angle DOX égal à l'angle OXC. Cette droite étant évidemment parallele à la perpendiculaire CX (n°. 88), ſera perpendiculaire elle-même au plan P.

CHAPITRE ONZIEME.

Les Solides ou les Corps.

509. SOLIDE ou CORPS, c'eſt l'étendue conſidérée avec les trois dimenſions, longueur, largeur, & profondeur ou hauteur.

Ainſi tout eſpace terminé, plein ou vuide de matiere, eſt un corps, parce que tout eſpace terminé renferme les trois dimenſions.

510. Le ſolide peut être conſidéré comme une *grandeur continue*; c'eſt-à-dire, comme un amas de tranches d'une épaiſſeur infiniment petites, que l'on peut par conſéquent regarder comme des ſurfaces. Dans ce ſens les ſurfaces ſeront les élémens du corps.

Il peut être auſſi conſidéré comme une *grandeur diſcrete*; c'eſt-à-dire, comme renfermant un certain nombre de meſures ſolides.

511. On nomme *meſure ſolide*, un corps dont les dimenſions ſont déterminées à volonté, ou par l'uſage.

512. Des différentes eſpeces de ſolides, on ne traitera ici que des *priſmes*, des *pyramides*, & de la *ſphere*.

SECTION PREMIERE.

Les Priſmes & les Cylindres.

DÉFINITIONS.

g. 287, 513. ON nomme *priſme* l'eſpace ſolide décrit par
, 289, une figure plane quelconque ABC, &c. qui ſe meut
, 291. parallélement à elle-même, de façon que ſes angles

A, B, C, &c. parcourent chacun une des lignes paralleles AF, BG élevées ſur le plan de cette figure.

Ce plan ABC qui, par ſon mouvement parallele, a engendré le priſme, & que l'on peut appeller l'*élément générateur*, eſt appellé *baſe du priſme*, lorſqu'on le conſidere à l'origine & à la fin de ſon mouvement.

Les droites paralleles AF, BG, &c. que les angles A, B, C, &c. ont parcourus, ſe nomment *les côtés du priſme*; & pour les diſtinguer des côtés de la baſe, on les appellera les *côtés montans*.

Les ſurfaces AG, CG, &c. compriſes entre les côtés montans, & les côtés des deux baſes, ſe nomment les *faces* du priſme.

514. Un priſme ABC, FGB eſt dit droit lorſque ſes côtés montans ſont perpendiculaires à ſa baſe; ſinon il eſt dit oblique, tel eſt le priſme *abcfed*. *Fig.* 287, 288.

515. Le priſme prend différens noms ſelon l'eſpece de ſa baſe, ou de l'élément générateur; on le nomme *priſme triangulaire* lorſque ſa baſe eſt un triangle. *Fig.* 287, 288.

On le nomme *parallélepipede* lorſque ſa baſe eſt un parallélogramme ou un triangle. *Fig.* 289.

Un parallélepipede droit, dont la baſe eſt un rectangle, ſe nomme *parallélepipede rectangle*. *Fig.* 289.

Un parallélepipede droit, dont la baſe eſt un quarré, & dont le côté montant eſt égal au côté de la baſe, ſe nomme *cube*. *Fig.* 290.

Si la baſe d'un priſme eſt un pentagone ou un exagone, &c. le priſme eſt dit *pentagonal*, *exagonal*, &c. *Fig.* 291.

Et ſi la baſe eſt un cercle, il prend le nom de *cylindre*. *Fig.* 294.

516. La hauteur du priſme ou du cylindre eſt une perpendiculaire *dh* abaiſſée d'un point quelconque de l'une des baſes ſur le plan de l'autre baſe. *Fig.* 287, 288, 293, 294.

517. Enfin on nomme *axe* du cylindre la droite OX qui joint les centres de deux baſes. *Fig.* 293, 294.

293, Dans le *cylindre droit*, l'axe eſt perpendiculaire ſur la baſe, & oblique dans le *cylindre oblique*.

CONSÉQUENCES.

287, 289, 291, 518. 1°. *Dans les priſmes ou dans les cylindres, les deux baſes & les élémens paralleles à ces baſes, ſont des figures ſemblables & égales.*

Car ces deux baſes, & ces élémens paralleles aux baſes, ne ſont autre choſe que l'élément générateur qui s'eſt mû parallélement à lui-même, & qui, à chaque point de ſon mouvement, a laiſſé une trace ſemblable, & égale à lui-même.

Par conſéquent, ſi on coupe un priſme par un plan parallele à la baſe, la ſection ſera une figure ſemblable, & égale à ſa baſe.

Et ſi on coupe un cylindre par un plan parallele à la baſe, la ſection ſera un cercle.

519. 2°. *Si le priſme eſt droit, ſes faces ſeront des rectangles.*

287, Car les côtés montans AF, BG, CO, &c. du priſme droit, étant perpendiculaires ſur la baſe, ils le ſont dès-lors ſur les côtés AB, BC, &c. de cette baſe, & par conſéquent auſſi ſur les côtés paralleles FG, GO, &c. de la baſe oppoſée (n°. 506).

Donc les ſurfaces compriſes entre les côtés montans d'un priſme droit, & les côtés paralleles des deux baſes ſont des rectangles (n°. 23).

288. 520. *Que ſi le priſme* abcfed *eſt oblique, quelqu'une de ſes faces pourra être rectangle.*

Car quoique les côtés montans ſoient obliques ſur la baſe, il peut s'en trouver, comme *af*, *be*, qui ſoient perpendiculaires ſur un côté *ab* de la baſe (n°. 497); & par conſéquent (n°. 506) perpendiculaires ſur le côté parallele *fe* de la baſe oppoſée; ce qui formera un rectangle *ae* (n°. 23).

Mais comme une oblique ſur un plan ne peut être perpendiculaire qu'à une ſeule droite de ce plan, qui paſſe par ſon pied (n°. 497), il s'enſuit que ſi, par exemple, le côté montant *be* eſt perpendiculaire ſur le côté *ab* de la baſe, il ſera oblique ſur le côté *bc*; ce qui formera un parallélogramme *bd* avec le côté montant *cd*, & le côté *ed* de la baſe oppoſée, parallele au côté *bc*, par conſéquent toutes les faces d'un priſme oblique ne peuvent être rectangles.

521. 3°. *Les côtés montans d'un priſme quelconque droit ou oblique, ſont égaux.*

Car les côtés montans ſont des côtés oppoſés de rectangles ou de parallélogrammes qui ont ſucceſſivement un côté commun.

Par exemple, dans le priſme droit ABCFGO, AF = BG comme côtés oppoſés du rectangle AG. Par la même raiſon, BG = CO dans le rectangle BO, & par conſéquent les côtés montans AF, BG, CO ſont égaux, & ainſi des autres. *Fig.* 25

522. 4°. *Le côté montant du priſme droit eſt égal à la hauteur de ce priſme.* *Fig.* 21

Car il eſt, de même que la hauteur du priſme, une perpendiculaire abaiſſée d'un point de l'une des baſes ſur l'autre baſe.

Dans le priſme oblique la hauteur eſt moindre que l'un des côtés montans de ce priſme: car en abaiſſant de l'un des angles *d* de la baſe ſupérieure, une perpendiculaire *dh* ſur l'autre baſe prolongée, s'il eſt néceſſaire, & en joignant les pieds *c*, *h* du côté montant *dc*, & de la perpendiculaire *dh* par une droite *ch*, on aura dans un même plan *cdh* (n°. 495), & ſur une même droite *ch*, une perpendiculaire *dh*, & le côté oblique *dc*, abaiſſés du même point *d*. Or la perpendiculaire eſt toujours plus courte que l'oblique abaiſſée du même point ſur une même ligne (n°. 78). *Fig.* 2

Donc.

523. 5°. *Dans les priſmes ou cylindres droits ou obliques, la hauteur exprime le nombre des élémens (en conſidérant ces élémens comme des tranches d'une épaiſſeur infiniment petite, & parallele à la baſe).*

Car la hauteur d'un priſme ou d'un cylindre meſure la diſtance des deux baſes oppoſées : or entre ces deux baſes paralleles, on peut placer autant d'élémens qu'il y a de points dans leur diſtance ou dans la hauteur. Donc le nombre des points de la hauteur ſera le nombre des élémens du priſme & du cylindre.

Par conſéquent, *deux priſmes ou deux cylindres qui ont des hauteurs égales, ont des nombres égaux d'élémens.*

ARTICLE I.

Des Priſmes & des Cylindres conſidérés quant à leur ſurface.

PROPOSITION I.

§. 291. 524. *La ſurface du priſme droit, ſans y comprendre les deux baſes, eſt égale au produit de la hauteur de ce priſme, par le contour de ſa baſe.*

DÉMONSTRATION.

La ſurface du priſme droit ABCDE, FGOIK, ſans y comprendre les deux baſes, n'eſt autre choſe que la ſomme des rectangles AG, BO, CI, DK, EF, formés par les côtés montans, & les côtés des deux baſes (n°. 519).

Or chacun de ces rectangles étant égal au produit de ſa hauteur qui eſt un côté montant, par ſa baſe (n°. 200) laquelle eſt un côté de la baſe du priſme; de plus les hauteurs de ces rectangles étant égales chacune à la hauteur du priſme (n°. 522), la ſomme de ces rectangles eſt évidemment égale au produit de

la hauteur du priſme par la ſomme de leurs baſes, laquelle eſt le contour de la baſe du priſme.

Donc la ſurface du priſme droit, ſans y comprendre ſes deux baſes, eſt égale au produit de la hauteur de ce priſme, par le contour de ſa baſe.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCES.

525. Donc : *Le développement de la ſurface du priſme droit, ſans y comprendre les baſes, eſt égal à un rectangle* Co *dont la hauteur* CO *eſt égale à celle du priſme, & dont la baſe* Cc *eſt le développement du contour de la baſe du priſme.* *Fig.* 291

526. Donc : *La ſurface du cylindre droit* ABC, FGO, *ſans y comprendre les deux baſes, eſt égale au produit de la hauteur de ce cylindre par la circonférence de ſa baſe.* *Fig.* 29

Car il eſt démontré que la ſurface du priſme droit, ſans y comprendre ſes deux baſes, eſt égale au produit de la hauteur de ce priſme, par le contour de ſa baſe; & comme l'on n'a pas limité le nombre des côtés de cette baſe, cette propoſition ſera encore vraie, lors même que la baſe du priſme droit aura une infinité de côtés, ou qu'elle ſera un cercle.

Mais un priſme droit, dont la baſe eſt un cercle, eſt un cylindre droit (n°. 515).

Donc la ſurface du cylindre droit, ſans y comprendre les deux baſes, eſt égale au produit de la hauteur de ce cylindre, par la circonférence de ſa baſe.

Et par conſéquent, *le développement de cette ſurface eſt égal à un rectangle* ah, *dont la hauteur* af *eſt égale à celle du cylindre, & dont la baſe* ag *eſt égale au développement de la circonférence de ſa baſe.* *Fig.* 29 295.

PROPOSITION II.

g. 288. 527. *La ſurface du priſme oblique* abcfed *y comprendre les deux baſes, eſt égale au pro l'un* af *de ſes côtés montans, par le contour d'u tion* RST *perpendiculaire à ce côté.*

DÉMONSTRATION.

On conſidérera que les côtés montans *af*, étant paralleles, & l'un *af* de ces côtés étant p diculaire à la ſection RST, les autres ſont néce ment perpendiculaires à cette même ſection (n°. & par conſéquent aux côtés RS, ST, TR d ſection, par leſquels ils ſont coupés.

On ſe rappellera encore que le parallélogr eſt égal au produit de l'un de ſes côtés par la p diculaire abaiſſée de ce côté ſur l'oppoſé (n°. 2

Ainſi la ſurface *ae* ſera égale au produit d montant *af* par le côté RS de la ſection; la ſ ſera égale au produit du côté montant *be* par ST de la ſection, & ainſi des autres.

Donc les faces du priſme oblique ſont égal cune au produit de l'un des côtés montans par de la ſection perpendiculaire tirée dans cette fa

Et comme les côtés montans ſont égaux (n° la ſomme des faces du priſme oblique ſera é produit de l'un des côtés montans par la ſom côtés, ou par le contour de la ſection perpe laire à ce côté.

Ce qu'il falloit démontrer.

CONSÉQUENCE.

g. 293. 528. Donc: *La ſurface du cylindre oblique, comprendre les deux baſes, eſt égale au produit*

F *du cylindre, par le contour d'une ſection perpendi-*
'aire à ce côté.

Car un cylindre oblique eſt un priſme oblique dont baſe a une infinité de côtés.

Mais on remarquera que la Géométrie manque de :thode pour déterminer exactement le développe-:nt ou le contour d'une ſection perpendiculaire au :té du cylindre oblique : on verra dans la ſuite l'eſ-ce de cette courbe.

ARTICLE II.

s Priſmes & les Cylindres conſidérés quant à leur ſolidité.

PROPOSITION I.

529. *Deux priſmes quelconques, ou deux cylindres, nt égaux lorſqu'ils ont des hauteurs égales & des ba-s égales.*

DÉMONSTRATION.

Dans un priſme quelconque, ou un cylindre, cha-ue élément parallele à la baſe eſt égal à la baſe (n°. 288). *Fig.* 287, 288, 293, 294.

Donc lorſque deux priſmes ou deux cylindres ont s baſes égales, les élémens de l'un ſont égaux aux émens de l'autre.

On ſait encore que deux priſmes ou deux cylin-res de même hauteur, ont même nombre d'élémens n°. 523).

Donc deux priſmes ou deux cylindres qui ont des auteurs égales & des baſes égales, ont un même ombre d'élémens égaux, & par conſéquent ſont aux. C. Q. F. D.

PROPOSITION II.

530. *Le ſolide d'un priſme quelconque, ou du cylindre, eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur.*

DÉMONSTRATION.

287, 291, 294. Les élémens du priſme ou du cylindre paralleles à la baſe ſont égaux (n°. 518), & leur nombre eſt exprimé par la hauteur (n°. 523).

Donc en prenant la baſe du priſme ou du cylindre, autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur, ou en multipliant la baſe par la hauteur, on aura la ſomme des élémens du priſme ou du cylindre, & par conſéquent leur ſolide. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

531. *Le ſolide d'un priſme quelconque, ou du cylindre, peut être regardé comme un produit de trois dimenſions.*

DÉMONSTRATION.

289. 1°. S'il s'agit d'un parallélipipede ABCDFGOE, comme ſa baſe AC eſt un parallélogramme ou un rectangle, & par conſéquent un produit de deux dimenſions; à ſavoir, de ſa longueur & de ſa largeur, & que pour avoir le ſolide d'un parallélipipede, il faut multiplier la baſe par la hauteur (n°. 530) qui eſt la troiſieme dimenſion.

Il eſt évident que le ſolide du parallélipipede eſt un produit de trois dimenſions.

291. 2°. S'il s'agit d'un priſme poligone ABCDEFGOIK, ſa baſe ABCDE étant égale au rectangle, ou au produit de deux dimenſions auquel on peut le réduire (n°. 461), le produit de cette baſe par la hauteur du priſme, ou le ſolide de ce priſme peut être

conſidéré comme le ſolide d'un parallélipipede rectangle, c'eſt-à-dire, comme un produit de trois dimenſions.

3°. S'il s'agit du cylindre, le cercle qui lui ſert de baſe, étant un produit de deux dimenſions; à ſavoir, du rayon par la moitié de la circonférence (n°. 226), le produit de ce cercle par la hauteur du cylindre, ou le ſolide de ce cylindre, eſt encore un parallélipipede ou un produit de trois dimenſions. Fig. 29 294.

Donc en général le ſolide d'un priſme quelconque ou d'un cylindre, peut être regardé comme un produit de trois dimenſions.

CONSÉQUENCE.

532. Puiſque le parallélipipede peut être regardé comme un produit de trois dimenſions multipliées les unes par les autres, en quel ordre on voudra, il eſt viſible que *lorſqu'on multipliera enſemble trois dimenſions, le produit repréſentera un parallélipipede qui aura pour baſe le rectangle fait de la multiplication de deux quelconques des trois dimenſions données, & dont la hauteur ſera la troiſieme dimenſion.*

Par exemple, le produit abc des trois dimenſions a, b, c, repréſentera un parallélipipede qui aura pour baſe ab, & pour hauteur c; ou pour baſe ac, & pour hauteur b; ou pour baſe bc, & pour hauteur a.

PROPOSITION IV.

533. *Si l'on multiplie le nombre des meſures quarrées contenues dans la baſe d'un priſme par le nombre des meſures linéaires (égales à celles qui ſont les côtés des meſures quarrées de la baſe) que renferme la hauteur, le produit ſera le nombre des meſures cubes contenues dans ce priſme, dont chacune aura pour côtés la meſure linéaire dont on s'eſt ſervi pour meſurer la hauteur du priſme, & les dimenſions de la baſe.*

PRÉPARATION.

Comme le ſolide du priſme, quelle que ſoit ſa
peut être regardé comme le ſolide d'un parallélip
rectangle (n°. 531), parce que ſa baſe peut être
vertie en un rectangle de même ſurface (n°.
450), il eſt évident que la propoſition ſera dé
trée pour tous les priſmes, en la démontrant p
parallélipipede rectangle.

g. 296. Soit donc un parallélipipede rectangle ABCF
ſuppoſant, pour faciliter la démonſtration, q
baſe contient huit toiſes quarrées, & ſa hauteur
toiſes linéaires, comme le produit de 8 multipli
3 eſt 24, on aura à démontrer que ce parallélip
renferme 24 toiſes cubes.

DE'MONSTRATION.

On coupera la hauteur AF de trois toiſes en
parties égales, & par les points K, D de diviſion
fera paſſer des plans DM, KI qui coupent ce p
lélipipede parallélement à ſa baſe.

Il eſt évident que, par cette conſtruction, le p
lélipipede ABCFGOP ſera partagé en trois tran
égales, ou en trois parallélipipedes rectangles A
DI, KO égaux (n°. 529); car ils auront, p
conſtruction, une toiſe de hauteur, & des baſes
les, puiſque les ſections du priſme coupé paral
ment à la baſe, ſont des figures ſemblables, & é
à la baſe (n°. 518).

Or la premiere KO de ces tranches ayant huit
quarrées de baſe, & une toiſe de hauteur, eſt évi
ment la ſomme de huit toiſes cubes, poſées imm
tement les unes à côté des autres.

Donc les deux autres tranches AM, DI étant
les chacune à la premiere, elles renferment auſſi

ıe huit toiſes cubes; & par conſéquent les trois enble feront la ſomme de trois fois huit toiſes cu-ſ, ou de 24 toiſes cubes. C. Q. F. D.

Conséquence.

524. Comme la baſe d'un priſme qui contient un ombre de meſures quarrées, eſt néceſſairement le oduit de deux nombres de meſures linéaires égales, qu'il eſt démontré (n°. 533) qu'en multipliant le ombre des meſures quarrées contenues dans la baſe ı priſme par le nombre de meſures (égales à celles ui ſont les côtés des meſures quarrées de la baſe) ue renferme la hauteur, le produit eſt le nombre des ieſures cubes contenues dans le priſme, leſquelles it pour côté la meſure linéaire employée dans la meıre de la hauteur & des dimenſions de la baſe; il it que ſi les trois dimenſions d'un priſme, ou auxelles un priſme peut être réduit (n°. 531), ſont primées en meſures linéaires égales, le produit de ; trois dimenſions ſera le nombre des meſures cus contenues dans ce priſme, leſquelles auront pour :é la meſure linéaire dont on s'eſt ſervi pour me:er les trois dimenſions du priſme.

SECTION II.

Les Pyramides & les Cônes.

Définitions.

525. On nomme *pyramide* un corps ABC, &c. S. *Fig.* 29, 300, 30, 304, 30, 308.
nfermé par des triangles qui partent tous d'un mê- point S, & qui ſe terminent aux côtés d'un poli-ne quelconque ABC, &c.

Les triangles ASB, BSC, &c. qui renferment la pyramide, & qui ſe réuniſſent à un même point S, ſe nomment les *faces* de la pyramide.

Le point S où ſe réuniſſent toutes les faces de la pyramide, ſe nomme le *ſommet* de la pyramide.

On nomme *côtés montans* de la pyramide, les côtés SA, SB, &c. menés du ſommet de la pyramide aux angles de la baſe.

La perpendiculaire SH menée du ſommet S de la pyramide ſur le plan de la baſe, ſe nomme *hauteur* de la pyramide.

536. La pyramide prend différens noms ſelon le nombre des côtés de ſa baſe.

Fig. 303, 304. On l'appelle *triangulaire*, lorſque ſa baſe eſt un triangle.

Fig. 307. *Quadrangulaire*, lorſque ſa baſe eſt un quadrilatere.

Fig. 300, 308. *Pentagonale*, *exagonale*, &c. lorſque ſa baſe eſt un pentagone, ou un exagone, &c.

Fig. 299. 537. Une pyramide ABCDEF. S. eſt dite *réguliere* lorſque ſa baſe eſt un poligone régulier, & que la droite SH menée du ſommet S au centre de la baſe, eſt perpendiculaire ſur cette baſe.

Fig. 301. 538. Le *cône* eſt une pyramide dont la baſe eſt un cercle.

Une droite SA menée du ſommet S du cône à un point quelconque de la circonférence de la baſe, eſt dite *côté* du cône.

Une droite SH menée du ſommet S du cône au centre de la baſe, eſt dite *axe* du cône.

Fig. 301. 539. Le cône eſt dit *droit*, lorſque ſon axe eſt perpendiculaire ſur ſa baſe, & dans ce cas l'axe n'eſt point différent de la hauteur du cône, c'eſt-à-dire, de la perpendiculaire abaiſſée du ſommet S ſur la baſe.

Fig. 306. Le cône eſt dit *oblique*, lorſque ſon axe S*h* eſt obli-

que ſur ſa baſe, & alors l'axe eſt plus grand que la hauteur S*m* du cône.

340. Lorſque l'on coupe une pyramide ou un cône par un plan parallele à la baſe, la partie de la pyramide ou du cône, compriſe entre la baſe & la ſection, ſe nomme *pyramide tronquée*, ou *cône tronqué à baſes paralleles.* *Fig.* 301. 302.

CONSÉQUENCES.

541. 1°. *Les côtés montans* SA, SB, SC *de la pyramide réguliere* ABCDEF. S. *ſont égaux.* *Fig.* 29

Car la pyramide ABCDEF. S. étant réguliere, la droite SH menée du ſommet au centre de la baſe, eſt perpendiculaire ſur cette baſe, & par conſéquent (n°. 485) ſur les droites HA, HB, HC, &c. menées du centre aux angles de cette baſe; de plus la baſe ABCDEF eſt un polygone régulier, & par conſéquent les droites HA, HB, HC, &c. menées du centre aux ſommets des angles de cette baſe, ſont des rayons obliques égaux (n°. 60).

Donc les triangles SHA, SHB, SHC, &c. faits ſur les côtés montans par la perpendiculaire SH & par les rayons obliques de la baſe, ont un angle droit compris entre des côtés égaux; ainſi les côtés montans SA, SB, SC, &c. qui ſont les hypothénuſes de ces triangles rectangles ſont égaux (n°. 55).

542. *Et de-là il ſuit que les faces de la pyramide réguliere ſont des triangles entiérement égaux.* *Fig.* 299

Car les côtés de la baſe réguliere ABCDEF étant égaux, & les côtés montans SA, SB, SC, &c. étant auſſi égaux, les triangles ASB, BSC, CSD, &c. ont trois côtés égaux chacun à chacun, & ſont par conſéquent entiérement égaux (n°. 58).

543. D'où l'on conclurra que *les perpendiculaires* SP *que l'on menera du ſommet* S *de la pyramide réguliere* *Fig.* 29

ABCDEF. S. *ſur les côtés de la baſe, c'eſt-à-dire, les hauteurs des faces de cette pyramide ſont égales;*

Puiſque ces faces ſont des triangles parfaitement égaux ſur les côtés égaux AB, BC, CD, &c. de la baſe de la pyramide (n°. 420).

301. 344. 2°. *Le cercle étant un poligone régulier d'une infinité de côtés, le cône droit* ABC S. *eſt une pyramide réguliere dont la baſe a une infinité de côtés.*

301. 545. *Et par conſéquent les côtés* SA, SC, *&c. du cône droit ſont égaux, & chacun de ces côtés peut être regardé comme une perpendiculaire abaiſſée du ſommet ſur l'un des côtés infiniment petits de la baſe.*

546. 3°. *La hauteur de la pyramide exprime le nombre des élémens de la pyramide (en conſidérant ces élémens comme des lames infiniment minces, ou comme des ſurfaces paralleles à la baſe, & poſées immédiatement les unes ſur les autres).*

Car la hauteur de la pyramide eſt la diſtance du ſommet de cette pyramide à la baſe.

Or entre la baſe & le ſommet on peut placer autant de lames ou d'élémens qu'il y a de points dans cette diſtance.

Donc la hauteur de la pyramide exprime le nombre des élémens de la pyramide : *l'on dira de même que la hauteur du cône exprime le nombre des élémens du cône.*

547. Et l'on conclurra que *deux pyramides ou deux cônes de même hauteur ſont compoſés d'un même nombre d'élémens paralleles à leurs baſes.*

ARTICLE PREMIER.

Propriétés fondamentales.

299, 308. 548. PROPOSITION. *Si on coupe une pyramide* ABCD, *&c.* S *par un plan* MNOP, *&c. parallele à la baſe* ABCD, *&c.*

1°. *Toutes les droites menées du ſommet* S *ſur le plan de la baſe, ſeront coupées proportionnellement par le plan de la ſection* MNOP.

2°. *La ſection* MNOP, *&c. ſera ſemblable à la baſe* ABCD, *&c.*

3°. *Les côtés homologues* AB, MN *de la baſe & de la ſection, & les contours de cette baſe & de cette ſection, ſeront dans la raiſon d'une droite quelconque* SH *tirée du ſommet* S *ſur le plan de la baſe & du ſegment* SR *de cette droite, pris du ſommet* S *au plan de la ſection.*

4°. *La ſurface de la baſe & celle de la ſection, ſeront dans la raiſon doublée de la même droite* SH, *& de ſon ſegment* SR.

DE'MONSTRATION de la premiere Partie.

Savoir, que les droites quelconques SA, SB, SC, SH, *&c. tirées du ſommet* S *ſur le plan de la baſe* ABCD, *&c. de la pyramide ſont coupées proportionnellement par le plan de la ſection parallele* MNOP, *&c.*

Soit mené un plan BSH par la droite quelconque SH tirée du ſommet S ſur le plan de la baſe, & par une autre droite quelconque SB menée auſſi du ſommet S ſur le plan de la baſe.

Les droites NR, BH qui ſont les communes ſections du plan BSH avec les plans de la baſe ABCD, &c. & de la ſection parallele MNOP, &c. ſeront paralleles (n°. 505); ainſi les triangles BSH, NSR donneront (n°. 267) . . . SH : SR :: SB : SN.

Et comme en menant des plans ASH, CSH, &c. par la même droite SH, & par toute autre droite SA ou SC, &c. menée du ſommet S ſur le plan de la baſe ABCDE, on démontreroit de la même façon que les droites SA, SC, &c. ſont coupées proportionnellement à la même droite SH, & à ſon ſegment SR:

On conclurra en général que toutes les droites menées du ſommet S de la pyramide ſur le plan de ſa baſe, ſont coupées proportionnellement par le plan d'une ſection parallele à cette baſe.

Ce qu'il falloit 1°. *démontrer.*

DÉMONSTRATION de la ſeconde Partie.

A ſavoir, que la ſection MNOP, *&c. eſt ſemblable à la baſe* ABCD, *&c.*

(n°. 299, 308.)

Car deux figures ſont ſemblables lorſqu'elles ont leurs angles égaux, & leurs côtés homologues proportionnels (n°. 274).

Or, 1°. les plans paralleles MNOP, &c. ABCD, &c. étant rencontrés par les faces ASB, BSC, CSD, &c. les communes ſections MN, AB, NO, BC, &c. ſont paralleles (n°. 505), & par conſéquent les angles de la ſection MNOP, &c. ſont égaux aux angles de la baſe ABCD, &c. chacun à chacun (n°. 500); c'eſt-à-dire, que l'on a l'angle MNO = l'angle ABC, l'angle NOP = l'angle BCD, &c.

2°. Les côtés MN, AB étant paralleles, les triangles ASB, MSN ſeront ſemblables (n°. 267), & donneront . . . . . MN : AB :: SB : SN.

Les côtés NO, BC étant paralleles, les triangles BSC, NSO ſeront ſemblables, & donneront . . . . . NO : BC :: SB : SN.

Donc (n°. 245) . . . MN : AB :: NO : BC.

Et l'on démontrera de même que les autres côtés correſpondans de la ſection parallele MNOP, &c. & de la baſe ABCD, &c. ſont proportionnels.

Donc la ſection parallele MNOP, &c. & la baſe ABCD, &c. ont leurs angles égaux chacun à chacun, & leurs côtés homologues proportionnels. Donc la ſection parallele MNOP, &c. & la baſe ABCD, &c. ſont des figures ſemblables. C. Q. F. 2°. D.

DÉMONSTRATION de la troiſieme Partie.

Savoir, que les côtés homologues AB, MN *de la baſe* ABCD, *&c. & de la ſection parallele* MNOP, *&c. & que les contours de cette baſe & de cette ſection, ſont dans la raiſon d'une droite quelconque* SH, *tirée du ſommet* S *ſur le plan de la baſe, & du ſegment* SR *de cette droite, pris du ſommet* S *au plan de la ſection.* Fig. 299, 307, 308

1°. Les côtés homologues AB, MN étant conſidérés dans les triangles ſemblables ASB, MSN, on a . . . . . AB : MN :: SA : SM.

Mais parce que toutes les droites menées du ſommet S ſur le plan de la baſe, ſont coupées proportionnellement par le plan de la ſection parallele MNOP, &c. comme on l'a vu (*premiere partie*), l'on a . . . . . SA : SM :: SH : SR.

Donc (n°. 245) . . . AB : MN :: SH : SR.

Et lorſque l'on ſuppoſera la droite SH perpendiculaire ſur le plan de la baſe, & par conſéquent auſſi ſur le plan de la ſection parallele MNOP (n°. 506); cette proportion ſignifiera que *les côtés homologues* AB, MN *de la baſe* ABCD, *&c. & de la ſection parallele*, MNOP, *&c. ſont dans la raiſon des diſtances de cette baſe & de cette ſection, au ſommet* S *de la pyramide.*

2°. La baſe ABCD, &c. & la ſection parallele MNOP, &c. étant des figures ſemblables, leurs contours ſont entr'eux comme leurs côtés homologues AB, MN (n°. 296).

Mais on vient de trouver AB : MN :: SH : SR.

Donc le contour ABCD, &c. . . . . : contour MNOP :: SH : SR. C. Q. F. 3°. D.

DE'MONSTRATION de la quatrieme Partie.

Savoir, que la ſurface de la baſe ABCD, *&c. & la* Fig. 29 307, 30

ſurface de la ſection parallele MNOP, *&c. ſont dans la raiſon du quarré d'une droite quelconque* SH *menée du ſommet* S *ſur le plan de la baſe, & du quarré de ſon ſegment* SR *pris du ſommet* S *au plan de la ſection.*

Car la baſe ABCD, &c. & la ſection parallele MNOP, &c. étant des figures ſemblables, comme on l'a vu ci-deſſus (*ſeconde partie*), leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues AB, MN (n°. 423).

Mais on vient de trouver (1re *part.*) AB:MN::SH:SR.

Et par conſéquent (n°. 259) $\overline{AB}^2 : \overline{MN}^2 :: \overline{SH}^1 : \overline{SR}^1$.

Donc, ſurface ABCD, &c. : ſurface MNOP, &c. $:: \overline{SH}^1 : \overline{SR}^1$. C. Q. F. 4°. D.

549. Lorſque l'on ſuppoſera la droite SH perpendiculaire ſur le plan de la baſe, & par conſéquent auſſi ſur le plan de la ſection parallele (n°. 506), la proportion ſurf. ABCD : ſurf. MNOP :: $\overline{SH}^2 : \overline{SR}^1$, ſignifiera que *la ſurface de la baſe d'une pyramide, & celle d'une ſection parallele à cette baſe, ſont dans la raiſon des quarrés des diſtances de cette baſe, & de cette ſection au ſommet de la pyramide.*

CONSEQUENCES *de la propoſition fondamentale.*

g. 299, 550. Il ſuit de la premiere partie, 1°. *que ſi du ſommet* S *d'une pyramide* ABCD, *&c.* S. *coupée par un plan* MNOP, *&c. parallele à la baſe, on mene une droite quelconque* SH *ſur la baſe, le point* H *de la baſe* ABCD, *&c. & le point* R *où la ſection parallele* MNOP, *&c. ſont rencontrées par la droite* SH, *ſont des points ſemblablement poſés dans la baſe & dans la ſection.*

Car ſi on fait paſſer des plans par la droite SH, & par tous les côtés montans de la pyramide, la baſe ABCD, &c. & la ſection parallele MNOP, &c. ſe-

ont diviſées par la rencontre de ces plans, en un même nombre de triangles qui auront leurs ſommets, eux de la baſe au point H, & ceux de la ſection au oint R, & l'on démontrera aiſément que ces trianles ſont ſemblables chacun à chacun.

Prenons pour exemple les triangles AHB, MRN.

Les triangles ASH, MSR étant ſemblables, à auſe des communes ſections paralleles MR : AH (n°. 267, 505), on a . . . AH : MR :: SH : SR.

Les triangles BSH, NSR étant auſſi ſemblables à cauſe des communes ſections paralleles BH, NR (n°. 267, 505), on a . . . BH : NR :: SH : SR.

Les triangles ASB, MSN étant auſſi ſemblables à cauſe des communes ſections paralleles MN, AB (n°. 267, 505), on a . . . AB : MN : SH : SR.

D'où l'on conclurra (n°. 245) . . . . . AH : MR :: BH : NR :: AB : MN.

C'eſt-à-dire, que les triangles AHB, MRN ont leurs trois côtés proportionnels, & que par conſéquent ils ſont ſemblables (n°. 270).

Et comme l'on prouvera de la même façon que les triangles NRO, ORP, &c. de la ſection parallele ſont ſemblables aux triangles correſpondans BHC, CHD, &c. de la baſe, on conclurra que les points H, R ſont des ſommets d'autant de triangles ſemblables faits dans la baſe, & dans la ſection parallele ſur les côtés homologues de cette baſe, & de cette ſection; & que par conſéquent (n°. 286) ces points H, R ſont ſemblablement placés dans la baſe, & dans la ſection parallele.

551. 2°. *Si on coupe une pyramide réguliere* ABCDE. *Fig.* 3
par un plan ZGTVYX *parallele à la baſe* ABCDEF, *les faces du tronc de pyramide* ABCDEF, ZGTVYX, *ou les trapézoïdes* AG, BT [illegible] *auront des hauteurs* ac, bd, *&c. égales.*

Car les hauteurs *a*S, *b*S des faces ASB, BSC de la pyramide entiere étant égales (n°. 542), & coupées proportionnellement par le plan parallele ZGTVYX (*premiere partie* n°. 548), il eſt néceſſaire que leurs ſegmens *ac*, *bd* ſoient égaux (n°. 244).

Or ces ſegmens ſont les hauteurs des trapézoïdes AG, BT, ou des faces du tronc de pyramide réguliere à baſes paralleles. Donc, &c.

552. Il ſuit de la ſeconde & troiſieme partie, p. 299 1°. *que ſi par le milieu* M *de l'un* AS *des côtés montans d'une pyramide quelconque* ABCDEF. S. *on fait paſſer un plan* MNOPQT *qui coupe cette pyramide parallélement à la baſe, le contour* MNOPQT *de la ſection, ſera la moitié du contour* ABCDEF *de la baſe.*

Car le contour de la baſe d'une pyramide eſt au contour d'une ſection parallele à cette baſe, dans la raiſon d'une droite quelconque menée du ſommet ſur le plan de la baſe, & du ſegment de cette droite, pris du ſommet au plan de la ſection (*troiſieme partie* n°. 548); ainſi on aura . . . . . contour ABCDEF : contour MNONPQT :: SA : SM.

Or le ſegment SM eſt, par la ſuppoſition, la moitié du côté montant SA.

Donc le contour MNOPQT de la ſection parallele, & faite par le milieu de l'un SA des côtés montans, eſt auſſi la moitié du contour ABCDEF de la baſe.

p. 300. 553. 2°. *Si par le milieu* M *de l'un* AZ *des côtes montans d'un tronc de pyramide* ABCDEF, ZGTVYX *à baſes paralleles, on fait paſſer un plan* MNOPQR *qui coupe ce tronc parallélement aux baſes oppoſées, le contour* MNOPQR *de cette ſection parallele, ſera la moitié de la ſomme des contours* ABCDEF, ZGTVYX *des deux baſes oppoſées de ce tronc.*

Car les trois plans ABCDEF, MNOPQR, ZGTVYX étant des figures ſemblables (n°. 548,

remiere partie) on aura (n°. 298)

°. contour ABCDEF : SA :: MNOPQR : SM.
.°. contour ZGTVYX : SZ :: MNOPQR : SM.

D'où l'on tire, en ajoutant les termes correſpondans de ces deux proportions (n°. 257), & en alternant enſuite (n°. 255) :

La ſomme des contours ABCDEF, ZGTVYX des deux baſes paralleles du tronc,

Eſt à deux fois le contour MNOPQR de la ſection parallele :

Comme SA + SZ

Eſt à 2SM.

Mais 2SM eſt évidemment égal à SA + SZ.

Car 2SM eſt égal à 2MZ + 2SZ.

SA + SZ eſt égal à AZ + 2SZ, ou à 2MZ + 2SZ, parce que AZ eſt, par la ſuppoſition, coupée en deux également au point M.

Donc deux fois le contour MNOPQR de la ſection parallele, faite par le milieu de l'un AZ des côtés montans du tronc, eſt auſſi égal à la ſomme des contours ABCDEF, ZGTVYX des baſes paralleles de ce tronc.

Et par conſéquent le contour de cette ſection eſt égal à la moitié de la ſomme des contours des deux baſes paralleles du tronc.

554. Il ſuit de la quatrieme partie : *Que ſi deux pyramides quelconques* ABCD. S, ABCDE. S *de même hauteur, ſont coupées parallélement à leurs baſes* ABCD, ABCDE, *& à égale diſtance de leur ſommet* S. S, *les ſurfaces des ſections* MNOP, MNOPQ, *ſeront proportionnelles aux baſes* ABCD, ABCDE. *Fig.* 308.

Car lorſqu'une pyramide eſt coupée parallélement à ſa baſe, la ſurface de la ſection & celle de la baſe, ſont dans la raiſon des quarrés des diſtances de la ſection & de la baſe, au ſommet de la pyramide (n°. 549).

Donc, ſi des ſommets S, S des deux pyramides ABCD. S, ABCDE. S. on abaiſſe des perpendiculaires SH, SH ſur les plans des baſes, leſquelles ſeront auſſi perpendiculaires ſur les plans des ſections MNOP, MNOPQR (n°. 506), on aura :

Pour la pyramide ABCD. S. ſurf. MNOP : ſurf. ABCD :: $\overline{SR}^2 : \overline{SH}^2$.

Pour la pyramide ABCDE. S. ſurf. MNOPQ : ſurface ABCDE :: $\overline{SR}^2 : \overline{SH}^2$.

Mais parce que l'on ſuppoſe les pyramides de même hauteur, & les ſections paralleles à égale diſtance des ſommets, on a . . . SH = SH, SR = SR.

Et par conſéquent (*axiome* 11) $\overline{SR}^2 : \overline{SH}^2 :: \overline{SR}^2 : \overline{SH}^2$.

Donc (n°. 245) ſurf. MNOP : ſurf. ABCD :: ſurf. MNOPQ : ſurf. ABCDE.

C'eſt-à-dire, que dans deux pyramides de même hauteur, les ſections faites parallélement aux baſes, & à égale diſtance des ſommets ſont proportionnelles aux baſes.

555. Et lorſque les pyramides de même hauteur auront encore deux baſes égales, cette proportion ſignifiera que *les ſections* MNOP, MNOPQ, *faites parallélement aux baſes, & à égale diſtance des ſommets, ſeront des figures égales, puiſqu'elles ſeront proportionnelles à des baſes égales.*

REMARQUE.

L'on peut appliquer aux cônes la propoſition fondamentale.

Car, comme le cône eſt une pyramide dont la baſe a une infinité de côtés, & que dans la démonſtration de la propoſition précédente, on n'a pas déterminé le nombre des côtés de la baſe de la pyramide, il eſt évident

vident que cette propoſition & ſes conſéquences s'étendent auſſi aux cônes.

556. Ainſi, *ſi on coupe un cône quelconque* ABC. S *par un plan* MNO *parallele à la baſe* ABC.

1°. *Toutes les droites menées du ſommet* S *ſur le plan de la baſe* ABC, *ſont coupées proportionnellement par le plan de la ſection parallele* MNO.

2°. *La ſection parallele* MNO *ſera un plan ſemblable à la baſe* ABC, *& par conſéquent un cercle.*

3°. *Les lignes homologues de la baſe* ABC, *& de la ſection parallele* MNO, *par exemple, leurs rayons & les circonférences de la baſe & de la ſection, ſeront dans la raiſon d'une droite quelconque* SH *menée du ſommet* S *ſur le plan de la baſe, & du ſegment* SR *de cette droite, pris du ſommet* S *au plan de la ſection.* Fig. 3

Ce qui ſignifiera, lorſque la droite SH ſera perpendiculaire ſur le plan de la baſe, que *les rayons de la baſe & de la ſection parallele, de même que les circonférences de cette baſe & de cette ſection, ſeront dans la raiſon des diſtances de la baſe & de la ſection au ſommet* S *du cône.*

4°. *La ſurface de la baſe* ABC, *& celle de la ſection parallele* MNO, *ſont dans la raiſon du quarré d'une droite quelconque* SH *menée du ſommet ſur le plan de la baſe, & du quarré du ſegment* SR *de cette droite, pris du ſommet* S *du cône au plan de la ſection.*

Par conſéquent lorſque la droite SH ſera perpendiculaire ſur le plan de la baſe ABC, & dès-lors (n°. 506) auſſi ſur le plan de la ſection parallele MNO, *la ſurface de la baſe* ABC, *& celle de la ſection parallele* MNO *ſeront dans la raiſon des quarrés de leurs diſtances au ſommet* S *du cône.* Fig. 30

CONSÉQUENCES.

557. 1°. *Si du ſommet* S *d'un cône quelconque* ABC. Fig. 3

... coupé par un plan MNO *parallele à la baſe, on mene une droite quelconque* SH *au plan de la baſe, le point* H *de la baſe* ABC, *& le point* R *où la ſection parallele* MNO *ſera rencontrée par la droite* SH, *ſeront des points ſemblablement poſés dans cette baſe & dans cette ſection.*

Et par conſéquent ſi le point H eſt le centre de la baſe ABC, le point R ſera auſſi le centre de la ſection parallele MNO; ce qui montre que l'axe du cône paſſe par les centres des élémens paralleles à la baſe, c'eſt-à-dire, par les centres des cercles élémentaires du cône.

... S. ... S. *par le milieu* M *de l'un* AS *des côtés ... ... ABC. S. on fait paſſer un plan* MNO *... ... ce cône parallélement à ſa baſe* ABC, *... ... ſection* MNO *ſera la moitié de ... ... baſe* ABC.

... S. *par le milieu* D *de l'un* AM *des côtés ... ... ABC,* MNO *à baſes paralleles, ... un plan* DEF *qui coupe ce tronc paral- ... ... aux baſes oppoſées, la circonférence de ... ... ſera la moitié de la ſomme des circon- ... ... des paralleles* ABC, MNO.

... S. *deux cônes quelconques droits ou obli- ... même hauteur, ſont coupées parallélement à leurs ... à égale diſtance des ſommets, les ſurfaces des ... ſont proportionnelles aux ſurfaces des baſes.*

... Et par conſéquent, *ſi ces cônes de même hau- ... ont encore des baſes égales, leurs ſections faites pa- ... ... aux baſes, & à égale diſtance des ſommets, ... des ſurfaces égales.*

ARTICLE II.

Les Pyramides & les Cônes conſidérés quant à leur ſurface.

PROPOSITION I.

562. *La ſurface de la pyramide réguliere* ABCDEF. S, *ſans y comprendre ſa baſe, eſt égale au produit d'une droite* SP *menée du ſommet perpendiculairement ſur l'un* AB *des côtés de la baſe par la moitié d'une droite égale au contour* ABCDEF *de la baſe.* Fig. 29.

Cette même ſurface eſt égale au produit de la multiplication de la droite SP *par une droite égale au contour d'une ſection* MNOPQT, *faite parallélement à la baſe, & par le milieu de l'un* AS *des côtés montans, ou à égale diſtance du ſommet* S *& de la baſe.*

DÉMONSTRATION.

La pyramide ABCDEF. S. étant réguliere, la perpendiculaire SP abaiſſée du ſommet S ſur l'un AB des côtés de la baſe ABCDEF, ſera la hauteur de chaque face de cette pyramide (n°. 543).

Mais chacune de ces faces eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de ſa baſe, qui eſt un côté de la baſe de la pyramide, parce que tout triangle a pour produiſant ſa hauteur & la moitié de ſa baſe (n°. 216).

Donc la ſomme de ces faces, ou la ſurface de la pyramide réguliere ABCDEF. S, ſans y comprendre ſa baſe, eſt égale au produit de la multiplication de la droite SP par la moitié de la ſomme des baſes de ſes faces, ou par une droite égale à la moitié du contour de la baſe de cette pyramide. C. Q. F. 1°. D.

2°. Le contour de la ſection MNOPQT eſt la moitié du contour ABCDEF de cette baſe (n°. 552).

Donc, puiſque la ſurface de la pyramide réguliere ABCDEF. S. ſans y comprendre ſa baſe, eſt égale au produit de la droite SP menée perpendiculairement du ſommet S ſur l'un AB des côtés de la baſe par une droite égale à la moitié du contour de la baſe; cette ſurface ſera auſſi égale au produit de la même droite SP, par une droite égale au contour MNOPQT d'une ſection parallele à la baſe, & faite par le milieu de l'un AS des côtés montans, ou à égale diſtance du ſommet & de la baſe. C. Q. F. 2°. D.

CONSÉQUENCE.

301. 563. Le cône droit ABC. S. étant une pyramide réguliere, dont la baſe eſt un poligone régulier d'une infinité de côtés, ſon côté SA n'étant pas différent de la perpendiculaire menée du ſommet S ſur l'un des côtés infiniment petits de la baſe; enfin la circonférence d'une ſection MNO de ce cône, faite parallélement à la baſe, & par le milieu du côté AS, étant la moitié de la circonférence de la baſe (n°. 558), on conclurra 1°. *que la ſurface du cône droit, ſans y comprendre ſa baſe, eſt égale au produit de la multiplication du côté* SA *de ce cône par une droite égale à la moitié de la circonférence* ABC *de ſa baſe.*

2°. *Que cette même ſurface eſt égale au produit de la multiplication du côté* SA *par une droite égale au contour de la ſection* MNO, *faite parallélement à la baſe & à égale diſtance du ſommet & de la baſe.*

PROPOSITION II.

300. 564. *La ſurface d'un tronc de pyramide réguliere* ABCDEF, ZGTVYX *à baſes paralleles, ſans y comprendre ces deux baſes, eſt égale au produit de la multiplication d'une perpendiculaire* ac *menée entre deux côtés homologues des baſes oppoſées par une droite égale*

à la moitié de la ſomme des contours ABCDEF, ZGTVYX *de ces deux baſes oppoſées.*

Cette même ſurface eſt égale au produit de la multiplication de la même perpendiculaire ac *par une droite égale au contour d'une ſection* MNOPQR, *faite parallélement aux deux baſes oppoſées, & à égale diſtance de ces deux baſes, ou par le milieu* M *de l'un* AZ *des côtés montans de ce tronc.*

DÉMONSTRATION.

Puiſque le ſolide ABCDEF, ZGTVYX eſt un tronc de pyramide réguliere à baſes paralleles, la perpendiculaire *ac* menée entre deux côtés homologues des deux baſes oppoſées, eſt la hauteur de chacune de ſes faces ou de chaque trapézoïde AG, BT, &c. (n°. 551). *Fig.* 30

Or, chacun de ces trapézoïdes eſt égal au produit de la multiplication de la moitié de la ſomme de ſes côtés paralleles (leſquels ſont des côtés homologues des deux baſes paralleles du tronc) par la perpendiculaire compriſe entre ces côtés paralleles (n°. 222).

Donc la ſomme de ces trapézoïdes, ou la ſurface du tronc de pyramide réguliere à baſes paralleles, ſans y comprendre ces deux baſes paralleles, eſt égale au produit de la multiplication de la perpendiculaire *ac* par une droite égale à la moitié de la ſomme des côtés paralleles de ces trapézoïdes, ou par une droite égale à la moitié de la ſomme des contours des deux baſes paralleles. C. Q. F. 1°. D.

2°. Le contour de la ſection MNOPQR du tronc ABCDEF, ZGTVYX de pyramide réguliere & à baſes paralleles, faite parallélement & à égale diſtance des deux baſes oppoſées, ou par le milieu de l'un AZ des côtés montans, eſt la moitié de la ſom- *Fig.* 30

me des contours ABCDEF, ZGTVYZ des deux baſes paralleles de ce tronc (n°. 553).

Donc, puiſque la ſurface de ce tronc, ſans y comprendre ſes baſes oppoſées, eſt égale au produit de la perpendiculaire *ac* menée entre deux côtés homologues de ſes deux baſes paralleles, par une droite égale à la moitié de la ſomme des contours de ces deux baſes paralleles;

Elle ſera auſſi égale au produit de la même droite *ac* par une droite égale au contour de la ſection MNOPQR, faite parallélement aux deux baſes oppoſées, & à égale diſtance de ces deux baſes. C. Q. F. 2°. D.

CONSÉQUENCE.

Fig. 302. 565. Le tronc ABC, MNO de cône droit à baſes paralleles, étant un tronc de pyramide réguliere à baſes paralleles, & d'une infinité de côtés, une droite AM menée par les extrêmités de deux rayons paralleles AH, MR n'étant pas différente de la perpendiculaire menée entre les côtés homologues & infiniment petits des baſes paralleles; enfin la circonférence d'une ſection DEF, faite parallélement aux deux baſes ABC, MNO, & à égale diſtance de ces deux baſes, ou par le milieu D de l'un AM des côtés de ce tronc, étant la moitié de la ſomme des circonférences des deux baſes ABC, MNO oppoſées (n°. 559), on en conclurra 1°. *que la ſurface du tronc du cône droit à baſes paralleles, ſans y comprendre les deux baſes, eſt égale au produit de la multiplication d'une droite* AM *menée par les extrêmités de deux rayons paralleles* AH, MR *des deux baſes oppoſées* ABC, MNO *par une droite égale à la moitié de la ſomme des circonférences des deux baſes oppoſées.*

2°. *Que cette même ſurface eſt égale au produit de*

la multiplication de la même droite AM, *par une droite égale à la circonférence d'une ſection* DEF *de ce tronc, faite parallélement aux baſes oppoſées, & à égale diſtance de ces baſes, ou par le milieu de l'un* AM *des côtés de ce tronc.*

REMARQUE.

566. Pour déterminer la ſurface de la pyramide irréguliere, on prendra la ſurface de chacune des faces, & on ajoutera la ſurface de la baſe, ſi l'on veut avoir la ſurface entiere. *Fig.* 307.

A l'égard de la ſurface du cône oblique, ſa meſure n'eſt pas du reſſort de la Géométrie élémentaire. *Fig.*

ARTICLE III.

Les Pyramides & les Cônes conſidérés quant à leur ſolide.

PROPOSITION I.

567. *Deux pyramides quelconques* ABCD, S, ABCDE, S, *ſont égales lorſqu'elles ont des hauteurs égales, & des baſes égales.* *Fig.* 308.

DEMONSTRATION.

Deux pyramides qui ont des hauteurs égales, ſont compoſées d'un même nombre de lames ou d'élémens paralleles à leurs baſes (n°. 547).

On a encore démontré (n°. 555) que deux pyramides ayant même hauteur, & des baſes égales, les ſurfaces des ſections MNOP, MNOPQ, faites parallélement aux baſes ABCD, ABCDE, & à égale diſtance des ſommets, ſont égales entr'elles.

Mais ces ſections ſont regardées comme les élémens des pyramides, réduits à une épaiſſeur infiniment petite, ou même égale à zero.

me des contours ABCDEF, Z
baſes paralleles de ce tronc (n°.

Donc, puiſque la ſurface de c
prendre ſes baſes oppoſées, eſt é
perpendiculaire *ac* menée entr
gues de ſes deux baſes paralle'
à la moitié de la ſomme de
ſes paralleles;

Elle ſera auſſi égale
ac par une droite é
MNOPQR, faite
poſées, & à égale
2°. D.

C

ne ba

Fig. 302. 565. Le
ſes paralle'
baſes pa'
AM
leles
cul-
ir

poſés d'un
prenant ces é
ılélement aux baſe
. Donc, &c.

PROPOSITI

569. *La pyramide triangulaire*
triangulaire de même baſe & de

DE'MONSTRA

Soit le priſme triangulaire que

Fig. 309. Ayant mené de l'extrêmité D
diagonales DB, DC, dans les f
l'autre extrêmité E la diagonale

Fig. 310, 311, 312. Si on fait paſſer un plan le long
DC, & un autre ſelon les diago
priſme triangulaire ABC, DE
pyramides ABC. D; BEC. D

Fig. 309, 310. Or, 1°. la pyramide ABC. D

met en D dans la base supérieure
pour base la base inférieure ABC
hauteur sera celle du prisme.

DEF. C étant considérée comme *Fig.* 309,
en C dans la base inférieure du 312.
base supérieure DEF du prisme,
celle du prisme.

ABC. D, DEF. C ont *Fig.* 310,
urs égales, & sont par 312.

EF. D étant consi- *Fig.* 311,
les moitiés BEC, 312.
du prisme (n°. 59), leur
point D, elles auront encore
savoir, la perpendiculaire menée
commun D sur le plan de la face BF
& par conséquent ces deux pyramides
EF. D sont encore égales (n°. 567).

trois pyramides ABC. D, BEC. D, DEF. C, *Fig.* 310,
els le prisme triangulaire ABCDEF est 311, 312.
nt égales.

l'une ABC. D de ces trois pyramides, la-
même base & même hauteur que le prisme
DEF est le tiers de ce prisme.

en général la pyramide triangulaire est le
un prisme triangulaire de même base & de
hauteur qu'elle. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

Une pyramide quelconque ABCDEF. S *est le* *Fig.* 299,
un prisme quelconque de même base & de même
r qu'elle.

DÉMONSTRATION.

sommet S de la pyramide polygone ABCDEF. S

568. Cette proposition s'étend évidemment aux
de même baſe & de même hauteur.

Car deux cônes de même hauteur ont un
nombre d'élémens paralleles à leurs baſes (n°. 5

Et leurs baſes étant égales de même que leur
teurs, toutes les ſections ou tous les élémens par
à la baſe, & conſidérés à égale diſtance des ſom
ſont égaux (n°. 561).

Donc deux cônes de même baſe & de même
teur, ſont encore compoſés d'un même nombr
lémens égaux (en prenant ces élémens dans c
des cônes, parallélement aux baſes, & à égale di
du ſommet). Donc, &c.

PROPOSITION II.

569. *La pyramide triangulaire eſt le tiers d'u
me triangulaire de même baſe & de même hauteur*

DE'MONSTRATION.

Fig. 309. Soit le priſme triangulaire quelconque ABC,

Ayant mené de l'extrêmité D de l'arête D
diagonales DB, DC, dans les faces AE, AF,
l'autre extrêmité E la diagonale EC dans la fac

Fig. 310. Si on fait paſſer un plan le long des diagonale

me ayant ſon ſommet en D dans la baſe ſupérieure du priſme, elle aura pour baſe la baſe inférieure ABC du priſme, & ſa hauteur ſera celle du priſme.

2°. La pyramide DEF. C étant conſidérée comme ayant ſon ſommet en C dans la baſe inférieure du priſme, ſa baſe ſera la baſe ſupérieure DEF du priſme, & ſa hauteur ſera encore celle du priſme. *Fig.* 309, 312.

Donc les deux pyramides ABC. D, DEF. C ont des baſes égales, & des hauteurs égales, & ſont par conſéquent égales (n°. 567). *Fig.* 310, 312.

3°. Les pyramides BEC. D, CEF. D étant conſidérées comme ayant pour baſes les moitiés BEC, CEF de la même face BF du priſme (n°. 59), leur ſommet étant au même point D, elles auront encore même hauteur; à ſavoir, la perpendiculaire menée du ſommet commun D ſur le plan de la face BF (n°. 535); & par conſéquent ces deux pyramides BEC. D, CEF. D ſont encore égales (n°. 567). *Fig.* 311, 312.

Donc les trois pyramides ABC. D, BEC. D, DEF. C, dans leſquels le priſme triangulaire ABCDEF eſt diviſé, ſont égales. *Fig.* 310, 311, 312.

Donc l'une ABC. D de ces trois pyramides, laquelle a même baſe & même hauteur que le priſme ABC, DEF eſt le tiers de ce priſme.

Donc en général la pyramide triangulaire eſt le tiers d'un priſme triangulaire de même baſe & de même hauteur qu'elle. C. Q. F. D.

PROPOSITION III.

570. *Une pyramide quelconque* ABCDEF. S *eſt le tiers d'un priſme quelconque de même baſe & de même hauteur qu'elle.* *Fig.* 299.

DÉMONSTRATION.

Du ſommet S de la pyramide poligone ABCDEF. S

ayant mené une droite SH à un point quelconque H de la baſe, ſi on fait paſſer des plans par cette droite SH, & par tous les côtés montans SA, SB, SC, &c. la baſe ABCDEF ſera diviſée par ces plans en autant de triangles AHB, BHC, CHD, &c. qu'elle a de côtés, & la pyramide poligone ABCDEF. S ſera diviſée en autant de pyramides triangulaires AHB. S, BHC. S, CHD. S, &c. de même hauteur que la pyramide poligone, & qui auront chacune pour baſe un des triangles dans leſquels la baſe poligone ABCDEF eſt diviſée.

Or chacune de ces pyramides triangulaires eſt le tiers du priſme correſpondant triangulaire de même hauteur, que l'on feroit ſur chaque triangle AHB, BHC, CHD, &c. dans leſquels la baſe poligone ABCDE eſt diviſée (n°. 569).

Il eſt de plus évident que tous ces priſmes triangulaires feroient enſemble un priſme poligone de même baſe & de même hauteur que la pyramide poligone ABCDEF. S.

Donc la ſomme des pyramides triangulaires qui compoſent une pyramide poligone ABCDEF. S eſt le tiers de la ſomme des priſmes triangulaires qui compoſent un priſme poligone de même baſe & de même hauteur que la pyramide poligone ABCDEF. S; & par conſéquent une pyramide poligone quelconque eſt le tiers d'un priſme poligone de même baſe & de même hauteur qu'elle. C. Q. F. D.

CONSÉQUENCES.

571. *Donc le ſolide d'une pyramide quelconque, eſt égal au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, ou au produit de ſa hauteur par le tiers de ſa baſe, ou au tiers du produit de ſa baſe par ſa hauteur.* Cela ſuit de ce que le ſolide du priſme eſt égal au produit de

la multiplication de ſa baſe, par ſa hauteur (n°. 530), & que le ſolide d'une pyramide quelconque eſt le tiers du ſolide d'un priſme de même baſe & de même hauteur (n°. 570).

572. *Donc, pour que le ſolide d'un priſme & d'une pyramide ſoient égaux, il faut, lorſque leurs baſes ſont égales, que la hauteur de la pyramide ſoit triple de la hauteur du priſme.*

Et lorſque les hauteurs ſont égales, il faut que la baſe de la pyramide ſoit triple de la baſe du priſme.

REMARQUE.

573. Comme le cône eſt une pyramide dont la baſe eſt un poligone d'une infinité de côtés, & que le cylindre eſt un priſme dont la baſe eſt un poligone d'une infinité de côtés, ce que l'on vient de dire de la pyramide & du priſme de même baſe & de même hauteur, s'étend au cône & au cylindre de même baſe & de même hauteur.

C'eſt-à-dire, 1°. *que le cône eſt le tiers du cylindre de même baſe & de même hauteur que lui.*

2°. *Que le ſolide du cône eſt égal au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur, ou égal au produit de ſa hauteur par le tiers de ſa baſe, ou au tiers du produit de ſa baſe par ſa hauteur.*

3°. *Pour que les ſolides d'un cône & d'un cylindre ſoient égaux, il faut, lorſque leurs baſes ſont égales, que la hauteur du cône ſoit triple de la hauteur du cylindre.*

Et lorſque les hauteurs ſont égales, il faut que la baſe du cône ſoit triple de la baſe du cylindre.

PROPOSITION IV.

574. *Lorſqu'une pyramide quelconque* ABCDE. S *eſt coupée par un plan* MNOPQ *parallele à la baſe* *Fig.* 3

ABCDE, *ſi du ſommet* S *on mene une droite* SH *perpendiculaire ſur le plan de la baſe, laquelle ſera auſſi perpendiculaire ſur le plan de la ſection parallele* MNOPQ (n°. 506), *on aura cette proportion.*

La différence BC—NO *de deux côtés homologues des deux baſes paralleles du tronc, eſt au plus petit* NO *de ces côtés, comme la hauteur* HR *du tronc eſt à la hauteur* SR *de la pyramide retranchée* MNOPQ. S.

DE'MONSTRATION.

La ſection MNOPQ étant parallele à la baſe ABCDE, on a (n°. 548, 3e *partie*) BC : NO :: SH : SR.

Donc en retranchant les antécédens des conſéquens (n°. 255), on aura BC — NO : NO :: SH — SR : SR.

Et en mettant la hauteur RH du tronc à la place de la différence SH — SR de la hauteur de la pyramide entiere, & de celle de la pyramide retranchée, on aura enfin . . . BC — NO : NO :: HR : SR.

C'eſt-à-dire, que la différence de deux côtés homologues des deux baſes paralleles du tronc, eſt au plus petit de ces côtés, comme la hauteur du tronc eſt à la hauteur de la pyramide retranchée.

CONSÉQUENCE.

313. 575. *Donc l'on pourra toujours déterminer le ſolide d'un tronc de pyramide à baſes paralleles, lorſque l'on connoîtra les deux baſes paralleles* ABCDE, MNOPQ, *deux côtés homologues* BC, NO *de ces baſes, & la hauteur* HR *de ce tronc.*

Car en faiſant la proportion BC—NO : NO :: HR : SR, comme les trois premiers termes ſont connus, on aura la hauteur SR de la pyramide MNOP. S retranchée; & cette hauteur étant ajoutée à la hauteur HR du tronc, on aura la hauteur SH de la pyramide entiere ABCDE. S.

Or connoiſſant la baſe ABCDE, & la hauteur SH de la pyramide entiere, & de même la baſe MNOPQ, & la hauteur SR de la pyramide retranchée, on pourra en déterminer les ſolides (n°. 571).

Et ſi du ſolide de la pyramide ABCDE. S, on retranche le ſolide de la pyramide MNOPQ. S, on aura le ſolide du tronc à baſes paralleles ABCDE, MNOPQ.

REMARQUE.

576. Lorſque l'on coupe un cône ABC. S, par un plan MNO parallele à ſa baſe ABC, & que du ſommet S on abaiſſe une perpendiculaire SH ſur le plan de la baſe, laquelle eſt auſſi perpendiculaire ſur le plan de la ſection parallele MNO (n°. 406), on a (n°. 556) . . . . AH : MR :: SH : SR. *Fig.* 31

Donc en retranchant les antécédens des conſéquens (n°. 255), on aura AH — MR : MR :: SH — SR : SR.

Et en ſubſtituant la hauteur HR du tronc de cône, à la différence SH — SR de la hauteur du cône entier ABC. S, & de celle du cône retranché MNO. S, on aura enfin . . . AH — MR : MR :: HR : SR.

Ce qui ſignifie que la différence des rayons des baſes du cône tronqué à baſes paralleles, eſt au plus petit de ces rayons, comme la hauteur de ce tronc eſt à la hauteur du cône retranché.

577. *Et par conſéquent l'on pourra toujours déterminer le ſolide d'un tronc de cône à baſes paralleles* ABC, MNO; *les rayons* AH, MR *de ces baſes, & la hauteur* HR *de ce tronc étant donnés.* *Fig.* 31

Car en faiſant la proportion AH — MR : MR :: HR : SR, comme les trois premiers termes ſont connus, on aura la hauteur SR du cône retranché MNO. S, & cette hauteur étant ajoutée à la hauteur HR du tronc, on aura la hauteur SH du cône entier ABC. S.

Or connoiſſant la baſe ABC, & la hauteur SH du cône entier, & de même la baſe MNO, & la hauteur SR du cône retranché, on pourra en déterminer les ſolides (n°. 573).

Et ſi du ſolide du cône ABC. S, on retranche le ſolide du cône MNO. S, on aura le ſolide du tronc ABC, MNO à baſes paralleles.

SECTION III.

La Sphere.

DEFINITIONS.

g. 315. 578. ON nomme *ſphere* un ſolide AXBD, dont la ſurface a tous ſes points également diſtans d'un point C en-dedans de ce ſolide. Ce point C à égale diſtance de tous les points de la ſurface, ſe nomme *centre* de la ſphere.

579. On peut auſſi définir la *ſphere*, le ſolide engendré par la révolution d'un demi-cercle ABX ſur ſon diametre immobile AX.

Car tous les points de la demi-circonférence génératrice ABX étant également diſtans de ſon centre C, & ce centre reſtant immobile pendant la révolution de la demi-circonférence ABX, il eſt évident que la ſurface qu'engendrera cette demi-circonférence, en tournant ſur ſon diametre AX, aura tous ſes points également diſtans du centre C, & ſera par conſéquent la ſurface d'une ſphere, & le ſolide renfermé dans cette ſurface, ſera une ſphere.

580. En regardant la *ſphere* comme le ſolide produit par la révolution d'un demi-cercle ABX ſur ſon diametre AX, on pourra encore la définir un amas d'une infinité de cercles poſés les uns ſur les autres,

perpendiculaires au diametre AX du demi-cercle générateur, & produits dans la révolution du demi-cercle, par les ordonnées de ce diametre AX.

Car ſi, dans le demi cercle générateur ABX, on mene, par exemple, l'ordonnée MH, comme dans la révolution de ce demi-cercle, l'ordonnée MH ſera conſtamment perpendiculaire au diametre AX, & que l'extrêmité M de cette ordonnée ſera toujours à égale diſtance du point H du diametre, il eſt évident que pendant le mouvement du demi-cercle générateur, cette ordonnée MH décrira un plan perpendiculaire au diametre AX, & terminé par une ligne dont tous les points ſeront à égale diſtance du point H, & ce plan ſera viſiblement un cercle (n°. 31).

Il en ſera de même des autres ordonnées du demi-cercle générateur ABX.

581. On peut enfin définir la *ſphere*, l'aſſemblage d'une infinité de petites pyramides dont les ſommets ſont à ſon centre, & dont les baſes ſont des ſurfaces planes infiniment petites, qui compoſent enſemble la ſurface de la ſphere.

582. Toute droite CB, CM, CA, &c. tirée du centre C de la ſphere à la ſurface, eſt dite *rayon* de la ſphere.

583. Toute droite AX, BD qui paſſe par le centre de la ſphere, & qui eſt terminée de part & d'autre à la ſurface, eſt dite *diametre* de la ſphere.

584. On nomme *ſegmens* de ſphere les deux parties MFGA, MFGX, dans leſquelles la ſphere eſt partagée lorſqu'elle eſt coupée par un plan MFG.

Lorſque le plan BED qui coupe la ſphere, paſſe par ſon centre C, les ſegmens BEDA, BEDX ſe nomment chacun *hémiſphere* ou *demi-ſphere*.

585. Lorſque l'on coupe la ſphere par deux plans paralleles MFG, BED, la partie de la ſphere, comprife entre ces plans, ſe nomme *zone*.

586. Enfin on nomme *ſecteur de ſphere*, un ſ
MFGAC, produit par la révolution d'un ſe
MAC de cercle ſur ſon rayon AC.

CONSÉQUENCES.

587. 1°. *Tous les rayons* CA, CB, *&c. de la*
ſont égaux.

En effet tous les points de la ſurface de la ſ
ſont à égale diſtance de ſon centre (n°. 578),
rayons ſont des droites tirées du centre aux poi
la ſurface (n°. 582).

588. 2°. *Tous les diametres* AX, BD, *&c.*
ſphere ſont égaux.

Car les diametres de la ſphere étant tous tir
le centre, & terminés à la ſurface de la ſphere
583), ils renferment chacun deux rayons, &
par conſéquent égaux.

589. 3°. *La ſection* MFG *de la ſphere par un*
eſt toujours un cercle.

Car ſi on fait paſſer par le centre de la ſphe
diametre AX perpendiculaire ſur le plan de l
tion MFG, la ſphere étant uniforme dans ſa ſi
c'eſt-à-dire, tous les points de ſa ſurface étant à
diſtance du centre, on pourra prendre le diamet
pour celui autour duquel le cercle générateur
ſa révolution pour engendrer la ſphere; & la ſ
MFG perpendiculaire au point H ſur le diamet
pourra être regardée comme un plan produit
révolution d'une ordonnée MH du diametre A
les plans décrits par les ordonnées du diametre
mi-cercle, ſont des cercles (n°. 580). Donc la ſ
MFG de la ſphere, coupée par un plan, eſt to
un cercle.

590. 4°. *Comme les ordonnées du diametre A*
demi-cercle générateur ABX *ſont d'autant plus gr*
q

qu'elles s'approchent de plus de celle qui paſſe par le centre, ou du rayon BC *perpendiculaire ſur le diametre* AX, *les cercles décrits par la révolution de ces ordonnées ſont d'autant plus grands que ces ordonnées s'approchent plus de celle qui paſſe par le centre* C, *c'eſt-à-dire, du rayon* BC; *& le cercle le plus grand eſt celui qui eſt décrit par le rayon* BC *du cercle générateur.*

591. 5°. *Comme les ſections de la ſphere coupée par des plans, peuvent être regardées comme des cercles décrits par les ordonnées du diametre du demi-cercle générateur, il eſt évident que la ſection de la ſphere coupée par un plan ſera d'autant plus grande que le plan coupant paſſera plus près du centre de la ſphere, & la ſection la plus grande ſera celle qui paſſera par le centre de la ſphere.* Fig. 315.

592. En conſéquence on diſtingue deux ſortes de cercles dans la ſphere; à ſavoir, les *grands* & les *petits*.

On nomme *grand cercle* de la ſphere, celui dont le plan paſſe par le centre de la ſphere, ou qui a même diametre que la ſphere.

Et l'on appelle *petit cercle* de la ſphere, celui dont le plan ne paſſe pas par le centre de la ſphere, ou dont le diametre eſt plus petit que celui de la ſphere.

ARTICLE I.

La Sphere conſidérée quant à ſa ſurface.

593. PROPOSITION. *La ſurface de la ſphere eſt égale au produit de la multiplication de la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere, par ſon diametre.*

DÉMONSTRATION.

Le cercle AEX *e*A étant un poligone régulier d'une infinité de côtés & infiniment petits, repréſen- Fig. 316.

tés par les droites BC, CD, DE, EF, FG, &c. (en ſuppoſant ces droites les plus petites poſſibles, pour qu'elles ſe confondent avec la circonférence), il eſt évident que lorſque la demi-circonférence AEX fera ſa révolution ſur le diametre AX, les côtés infiniment petits BC, CD, DE, EF, &c. dont elle eſt compoſée décriront une infinité de petites ſurfaces, dont la ſomme ſera la ſurface de la ſphere.

C'eſt par conſéquent en déterminant les produiſans de chacune de ces petites ſurfaces, que l'on pourra déterminer la ſurface de la ſphere.

On prendra pour exemple la ſurface décrite dans la révolution de la demi-circonférence, par l'un CD de ces côtés infiniment petits.

Des extrêmités C, D, & du milieu M de ce côté, on tirera ſur le diametre AX de révolution les perpendiculaires CI, MN, DP (leſquels doivent être regardées comme des ordonnées du diametre AX, parce que le côté CD étant ſuppoſé infiniment petit, il ſe confond avec l'arc qui lui répond); & l'on conſidérera que dans la révolution de la demi-circonférence, le côté CD décrira évidemment la ſurface convexe d'un petit cône droit tronqué, dont les baſes paralleles ſeront les cercles décrits par les ordonnées CI, DP, & dans lequel le cercle décrit par l'ordonnée MN, menée du milieu du côté CD, ſera une ſection parallele faite à égale diſtance de ces deux baſes.

Ainſi (n°. 565) la ſurface décrite par le côté CD, a pour produiſant le côté CD, & la circonférence du cercle décrit par l'ordonnée MN; & en exprimant la circonférence qui auroit l'ordonnée MN pour rayon par (circ. MN), l'expreſſion de la ſurface décrite par le côté CD ſera . . . . CD × (circ. MN).

Il faut à préſent examiner quelle partie du diametre

de la ſphere cette même ſurface décrite par CD auroit pour l'un de ſes produiſans, en lui donnant pour l'autre produiſant la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſurface.

Pour le déterminer, ſoit de l'extrêmité C du côté CD abaiſſée la perpendiculaire CS ſur l'ordonnée DP qui paſſe par l'autre extrêmité : ſoit auſſi du milieu M de ce même côté, mené le rayon MO.

Les triangles DCS, MNO qui réſultent de cette conſtruction, ont évidemment leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, & ſont par conſéquent ſemblables (n°. 273).

Ainſi l'on aura . . . CD : CS :: MO : MN.

Et CS étant égal à IP, on aura CD : IP :: MO : MN.

Les circonférences étant entr'elles comme les rayons (n°. 299).

Si on exprime par (circ. MN) la circonférence qui auroit MN pour rayon, & par (circ. MO) la circonférence qui auroit MO pour rayon, on aura encore . . . CD : IP :: circ. MO : circ. MN.

D'où l'on conclurra en faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens (n°. 252) . . . .

. . . . CD × circ. MN = IP × circ. MO.

C'eſt-à-dire, que le produit de la multiplication du côté CD par la circonférence du rayon MN, ou la ſurface décrite par le côté CD, eſt égale au produit de la multiplication de la circonférence du rayon MO, ou de même diametre que la ſphere, par la partie IP du diametre AX de la ſphere compriſe entre les perpendiculaires CI, DP, tirées ſur ce diametre des extrêmités C, D de ce côté CD.

Et en abaiſſant ſur ce diametre AX des extrêmités B, E, F, G, &c. des autres côtés qui compoſent la demi-circonférence, des perpendiculaires BA, EO, FQ, &c. on prouveroit de la même façon que les

ſurfaces décrites par chaque autre de ces côtés dans la révolution de la demi-circonférence AEZ, eſt égale au produit de la multiplication de la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere, par la partie du diametre AX, compriſe entre les perpendiculaires tirées des extrêmités de ce côté.

Or ces parties AI, IP, PO, OQ, QR, &c. du diametre AX, compriſes entre les perpendiculaires tirées ſur ce diametre des extrêmités de tous les côtés infiniment petits de la demi-circonférence, font enſemble le diametre AX du demi-cercle générateur ou de la ſphere.

Donc la ſomme des ſurfaces décrites par les côtés infiniment petits de la demi-circonférence génératrice, c'eſt-à-dire, la ſurface de la ſphere, eſt égale au produit de la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere, par ſon diametre. C. Q. F. D.

CONSÉQUENCES.

594. 1°. *La ſurface de la ſphere eſt égale à quatre fois la ſurface d'un cercle de même diametre qu'elle.*

Car la ſurface d'un cercle de même diametre que la ſphere, eſt égale au produit du quart de ce diametre par ſa circonférence (n°. 226), & l'on vient de voir que la ſurface de la ſphere eſt égale au produit de cette même circonférence par ſon diametre entier (n°. 593).

317. 595. 2°. *La ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface convexe du cylindre circonſcrit* FGHBED, *c'eſt-à-dire, d'un cylindre droit dont la hauteur eſt égale au diametre de la ſphere, & dont la baſe eſt un cercle de même diametre que la ſphere.*

Car la ſurface convexe du cylindre droit étant égale (n°. 525) au produit de la multiplication de la circonférence de ſa baſe par ſa hauteur, la ſurface con-

rexe du cylindre circonſcrit FGHBED a évidemment les mêmes produiſans que la ſurface de la ſphere; à ſavoir, la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere, & ſon diametre.

596. 3°. *La ſurface de la ſphere eſt à la ſurface totale du cylindre circonſcrit dans le rapport de 4 à 6 ou de 2 à 3.*

Car la ſurface convexe du cylindre circonſcrit FGHBED eſt (n°s 594, 595) de même que la ſurface de la ſphere, égale à quatre fois la ſurface d'un cercle de même diametre que la ſphere; & en ajoutant à la ſurface convexe du cylindre, la ſurface de ſes deux baſes qui ſont des cercles de même diametre que la ſphere, la ſurface totale du cylindre circonſcrit ſera égale à ſix fois la ſurface d'un cercle de même diametre que la ſphere, & par conſéquent la ſurface de la ſphere eſt à la ſurface du cylindre circonſcrit, comme 4 eſt à 6, ou 3 à 2.

597. 4°. *La ſurface convexe d'un ſegment quelconque* MFGA *de la ſphere eſt égale au produit de la multiplication de la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere, par la partie* AH *du diametre* AX *de la ſphere, qui exprime la hauteur du ſegment au-deſſus du plan qui le termine.* Fig. 31

Car la ſurface convexe de ce ſegment n'eſt autre choſe que la ſomme des ſurfaces convexes de tous les petits cônes tronqués, compris depuis le ſommet A de ce ſegment, juſqu'au bord M de ſa baſe, & cette ſomme eſt égale au produit de la hauteur totale AH de ces petits troncs de cône par la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere (n°. 593).

598. 5°. *On démontrera de la même façon, que la ſurface convexe d'une zône* BEDMFG *eſt égale au produit de la circonférence d'un cercle de même diametre que la ſphere par la hauteur* HC *de cette zône, qui eſt*

la diſtance des deux plans paralleles qui comprennent cette zône.

ARTICLE II.

La Sphere conſidérée quant à ſon ſolide.

599. PROPOSITION. *Le ſolide de la ſphere eſt égal au produit de la multiplication d'un cercle de même diametre qu'elle, par les deux tiers de ſon diametre.*

DÉMONSTRATION.

315. La ſphere eſt un aſſemblage d'une infinité de petites pyramides, dont les ſommets ſont à ſon centre, & dont les baſes ſont des ſurfaces planes infiniment petites, qui toutes enſemble compoſent la ſurface de la ſphere (n°. 581).

Or chacune de ces pyramides eſt égale au produit de ſa baſe par le tiers de ſa hauteur (n°. 571), c'eſt-à-dire, du rayon de la ſphere.

Par conſéquent leur ſomme ſera égale au produit de la ſurface de la ſphere par le tiers du rayon de la ſphere.

Mais la ſurface de la ſphere eſt égale à quatre fois la ſurface d'un cercle de même diametre qu'elle.

Donc le ſolide de la ſphere eſt égal au produit de la multiplication de quatre fois la ſurface d'un cercle de même diametre qu'elle, par le tiers de ſon rayon.

Il eſt encore évident que le produit de quatre fois un cercle de même diametre que la ſphere, par le tiers du rayon de la ſphere, eſt la même choſe que le produit d'un cercle de même diametre que la ſphere par quatre fois le tiers du rayon, ou par les deux tiers du diametre.

Donc le ſolide de la ſphere eſt égal au produit d'un cercle de même diametre que la ſphere, par les deux tiers de ſon diametre. C. Q. F. D.

CONSÉQUENCES.

600. 1°. *Le ſolide de la ſphere eſt au ſolide du cylindre circonſcrit* FGHBED *dans le rapport de 2 à 3, c'eſt-à-dire, qu'il en eſt les deux tiers.*

Car le ſolide du cylindre circonſcrit à une ſphere, *Fig.* eſt égal (n°. 530) au produit de ſa baſe, qui eſt un cercle de même diametre que la ſphere, par ſa hauteur qui eſt le diametre de la ſphere.

Or l'on vient de voir que le ſolide de la ſphere eſt égal au produit du même cercle ſeulement, par les deux tiers de ſon diametre. Donc, &c.

601. 2°. *Le ſolide d'un ſecteur* MFGAC *de ſphere,* *Fig.* *eſt égal au produit de la ſurface ſphérique de la calotte* MFGA *par le tiers du rayon* AC *de la ſphere.*

Car ce ſecteur eſt compoſé d'une infinité de petites pyramides qui ont toutes leurs ſommets au centre de la ſphere, & dont les baſes compoſent enſemble la ſurface ſphérique MFGA de la calotte de ce ſecteur.

Or la ſomme de ces pyramides eſt égale (n°. 571) au produit de la ſomme de leurs baſes, c'eſt-à-dire, au produit de la ſurface ſphérique de la calotte MFGA de ce ſecteur, par le tiers de leurs hauteurs, c'eſt-à-dire, par le tiers du rayon. Donc, &c.

602. *A l'égard du ſolide du ſegment* MFGA *de* *Fig.* *ſphere, il eſt évident que pour le déterminer, il faudra d'abord meſurer le ſolide du ſecteur* MFGAC; *& en retrancher le ſolide du cône* MFGC, *dont la baſe eſt le cercle qui termine le ſegment, le reſte ſera la valeur du ſegment ſphérique* MFGA.

SECTION IV.

Les Corps ſemblables, leurs propriétés générales, le rapport de leurs ſurfaces & de leur ſolidité.

ARTICLE I.

Définitions & propriétés générales des Corps ſemblables.

97, 603. ON dit que deux pyramides ou deux priſme
03, ſont *ſemblables*, lorſque leurs baſes & toutes leurs ſu
faces correſpondantes ſont des figures ſemblables, &
en même nombre.

PROPOSITION I.

97, 604. *Lorſque deux priſmes* ABCX, DEFG; abcx
defg *ſont ſemblables.*

1°. *Tous les côtés homologues de leurs baſes & d
leurs faces correſpondantes ſont proportionnels.*

2°. *Leurs hauteurs ſont proportionnelles à leurs côt
homologues quelconques.*

DE'MONSTRATION de la premiere Partie.

Les priſmes ABCX, DEFG, *abcx*, *defg* ſon
ſemblables, leurs baſes AC, *ac* ſont des figures ſem
blables (n°. 603).

Ainſi (n°. 274), on a . . . . . .
. . . AB : *ab* :: BC : *bc* :: AX : *ax* :: XC :
Les faces correſpondantes AG, *ag* ſont auſſi d
figures ſemblables, ainſi on a . . . . .
. . . AX : *ax* :: AD : *ad* :: XG : *xg* :: DG : *d*
Les baſes ſupérieures DF, *df* ſont auſſi ſemblable
ainſi on a DG : *dg* :: DE : *de* :: GF : *gf* :: EF : *e*

Les faces correſpondantes EC, *ec* ſont auſſi ſemblables, ainſi on a . . . . EF : *ef* :: FC : *fc* :: EB : *eb*.

Or ces ſuites de raiſons égales renferment les côtés omologues de ces priſmes, & ont chacune une raiɔn commune, par conſéquent elles ne ſont qu'une ême ſuite de raiſons égales.

Donc tous les côtés homologues des baſes, & des ces correſpondantes de deux priſmes ſemblables, ſont roportionnels. C. Q. F. 1°. D.

DE'MONSTRATION de la ſeconde Partie.

A ſavoir, *que les hauteurs de deux priſmes ſemblables ſont proportionnelles à deux de leurs côtés homologues quelconques.*

1°. Si les priſmes ſemblables ſont droits, leurs hauurs ſont évidemment égales à leurs côtés montans.

Or on vient de voir que tous les côtés homologues deux priſmes ſemblables ſont proportionnelles.

Donc lorſque les priſmes ſont droits, les hauteurs nt proportionnelles aux côtés homologues quelconques de ces priſmes.

2°. Si les priſmes ſemblables ABCX, DEFG, *hcx*, *defg* ſont obliques, des extrémités D, *d* de ux côtés homologues montans AD, *ad*, on abaiſſera des perpendiculaires DH, *dh* ſur les baſes, & on joindra les pieds de ces perpendiculaires & de ces ôtés montans, par les droites AH, *ah*. *Fig.* 297 298.

Cette conſtruction donnera les deux triangles AHD, *had*, évidemment ſemblables (n°. 271); car outre s angles droits H, *h*, les angles DAH, *dah* qui ſont n°. 497) les angles d'inclinaiſon des côtés montans D, *ad* ſur le plan des baſes ſont égaux, étant évident que dans les priſmes ſemblables tous les angles i ſe répondent étant égaux (n°. 603), les côtés montans homologues ſont néceſſairement également incli-

nés ſur les baſes, ainſi on aura DH : *dh* :: AD : *ad*.

C'eſt-à-dire, que les hauteurs DH, *dh* des priſmes ſemblables ſont proportionnelles aux côtés homologues montans AD, *ad*.

Or ces deux côtés homologues montans AD, *ad* ſont proportionnels à deux autres côtés homologues quelconques des priſmes ſemblables ABCX, DEFG, *abcx*, *defg*.

Donc lorſque deux priſmes ſont ſemblables, les hauteurs ſont proportionnelles aux côtés homologues quelconques de ces priſmes. C. Q. F. 2°. D.

CONSÉQUENCE.

605. Les cylindres ſemblables, droits ou obliques, ſont des priſmes ſemblables dont les baſes ont une infinité de côtés.

Ainſi, puiſque les priſmes ſemblables ont leurs hauteurs proportionnelles aux lignes homologues, & que dans les cylindres les rayons de leurs baſes ſont des lignes homologues, il eſt évident que les cylindres ſemblables ont leurs hauteurs proportionnelles aux rayons de leurs baſes.

Et l'on reconnoîtra que *deux cylindres ſont ſemblables, lorſque leurs axes étant également inclinés, ou perpendiculaires ſur leurs baſes, ils ſont, de même que les hauteurs, proportionnelles aux rayons de leurs baſes.*

PROPOSITION II.

303, 606. *Lorſque deux pyramides* ABC. S, abc. s *ſont ſemblables :*

1°. *Les côtés homologues de leurs baſes & de leurs faces correſpondantes ſont proportionnelles.*

2°. *Les hauteurs & les droites quelconques* SH, sh, *menées des ſommets à des points ſemblablement poſés*

dans les baſes, ſont proportionnelles aux côtés homologues quelconques de ces pyramides.

DE'MONSTRATION de la premiere Partie.

Les pyramides ABC. S, *abc*, *s* étant ſemblables, les baſes ABC, *abc* ſont ſemblables (n°. 603), ainſi on a . . . BC : *bc* :: AC : *ac* :: AB : *ab*.

Les faces ASB, *asb* ſont auſſi ſemblables, ainſi on a . . . . . AB : *ab* :: AS : *as* :: BS : *bs*.

Les faces BSC, *bsc* ſont auſſi ſemblables, ainſi on a . . . . . BS : *bs* :: BC : *bc*.

Or ces ſuites de raiſons égales renferment les côtés homologues de ces pyramides, & ont chacune une raiſon commune; par conſéquent elles ne ſont qu'une même ſuite de raiſons égales.

Donc tous les côtés homologues des baſes & des faces correſpondantes de deux pyramides ſemblables ſont proportionnels. C. Q. F. 1°. D.

DÉMONSTRATION de la ſeconde Partie.

Soit priſe ſur l'un SA des côtés montans de la plus grande pyramide ABC. S, une partie SD égale au côté homologue *sa* de la plus petite pyramide *abc*. *s*, & ſoit mené par le point D un plan DEF qui coupe la pyramide ABC. S, parallélement à ſa baſe ABC. *Fig.* 304.

La pyramide DEF. S, qui ſera retranchée par le plan parallele DEF, ſera ſemblable à la pyramide ABC. S.

Car les plans paralleles DEF, ABC, étant des figures ſemblables (n°. 548), les faces correſpondantes DSE, ASB, ESF, BSC, &c. étant auſſi ſemblables chacune à chacune (n°. 505, 267) à cauſe des côtés paralleles DE & AB, EF & BC, &c. les deux pyramides DEF. S, ABC. S ſont terminées par un

même nombre de figures ſemblables, & par conſéquent elles ſont ſemblables (n°. 603).

Mais la pyramide *abc. s*, eſt auſſi ſemblable (par la ſuppoſition) à la pyramide ABC. S.

Ainſi les deux pyramides *abc. s*, DEF. S ſont ſemblables, & auront par conſéquent tous leurs angles égaux chacun à chacun, & tous leurs côtés homologues proportionnels; enſorte que l'on aura . . . . . *sa* : SD :: *sb* : SE :: *sc* : SF :: *ab* : DE, &c.

Et comme l'on a fait SD = *sa*, on aura . . . *sa* = SD, *sb* = SE, *sc* = SF, *ab* = DE, &c.

C'eſt-à-dire, que les pyramides *abc. s*, DEF. S ont tous leurs angles égaux chacun à chacun, & tous leurs côtés homologues auſſi égaux chacun à chacun, & ſont par conſéquent déterminées de la même façon, évidemment égales en tout, & l'on pourra prendre l'une pour l'autre.

Or, 1°. on ſait (n°. 550) que ſi du ſommet S de la pyramide ABC. S on abaiſſe une droite quelconque SH ſur la baſe ABC, le point H de cette baſe, & le point *h*, où le plan de la ſection parallele DEF, eſt rencontré par cette droite, ſont des points ſemblablement poſés dans cette baſe & dans cette ſection.

303, 2°. On ſait (n°. 548, *premiere partie*) que les côtés montans homologues quelconques SA, SD de la pyramide ABC. S, & de la pyramide retranchée DFE. S ſont proportionnels aux droites SH, *sh*, & par conſéquent aux hauteurs de ces pyramides, lorſque ces droites SH, *sh* ſont perpendiculaires ſur les plans des baſes ABC, DEF.

3°. L'on ſait (n°. 548, *troiſieme partie*) que les côtés homologues quelconques AB, DE des deux baſes paralleles ABC, DEF de la pyramide ABC. S, & de la pyramide retranchée DEF. S, ſont proportionnels aux droites SH, *sh*, & par conſéquent aux hau-

urs de ces pyramides, lorſque les droites SH, *sh* nt perpendiculaires ſur les plans des baſes ABC, EF.

Donc, puiſque l'on peut prendre la pyramide *abc. s* ur la pyramide DEF. S, il ſuit que dans les pyramides ſemblables ABC. S, *abc. s* les hauteurs & les gnes quelconques SH, *sh*, tirées des ſommets S, *s* des points ſemblablement poſés dans les baſes, ſont roportionnelles aux côtés homologues quelconques A & *sa*, AB & *ab*, &c. de ces pyramides. C. Q. F. D.

CONSÉQUENCE.

607. Deux cônes ſemblables ABC. S, *abc. s*, ſont es pyramides ſemblables dont les baſes ont une inité de côtés.

Ainſi, puiſque dans les pyramides ſemblables les hauteurs & les lignes menées des ſommets à des points ſemblablement poſés dans les baſes, ſont proportionnelles aux lignes homologues de ces pyramides; & ue les rayons ou les diametres des baſes des cônes nt des lignes homologues à l'égard de ces cônes, il t évident que lorſque deux cônes ſont ſemblables, *urs hauteurs & leurs axes ſont proportionnels aux ayons ou aux diametres de leurs baſes.* *Fig.* 306.

On reconnoîtra que deux cônes ſont ſemblables lorſue leurs axes étant également inclinés ou perpendiculires ſur leurs baſes, ils ſont, de même que les hauurs, proportionnels aux rayons ou aux diametres des aſes.

ARTICLE II.

Rapport des Surfaces des Corps ſemblables.

PROPOSITION I.

608. *Les ſurfaces totales de deux priſmes ſemblables* *Fig.* 298.

ABCX, DEFG; abcx, defg *ſont proportionnelles*,

1°. *Aux quarrés des côtés homologues des baſes ou des faces correſpondantes de ces priſmes.*

2°. *Aux quarrés des hauteurs de ces priſmes.*

DÉMONSTRATION.

Les priſmes ABCX, DEFG; *abcx*, *defg* étant ſemblables, leurs baſes AC, *ac*, leurs oppoſées DF, *df*, & les faces correſpondantes AE, *ae*, BF, *bf* ſont des figures ſemblables (n°. 603), & par conſéquent proportionnelles aux quarrés de leurs côtés homologues (n°. 423).

Mais tous les côtés homologues des baſes & des faces correſpondantes des priſmes ſemblables, étant proportionnels (n°. 604), les quarrés de ces côtés ſont proportionnels (n°. 259).

Donc les baſes & les faces correſpondantes de deux priſmes ſemblables ſont auſſi proportionnelles entr'elles (n°. 245).

Et par conſéquent (n°. 256) la ſomme des ſurfaces qui terminent le premier priſme, & la ſomme des ſurfaces qui terminent le ſecond priſme, c'eſt-à-dire, les ſurfaces totales de ces priſmes, ſont proportionnelles à leurs baſes, ou à deux de leurs faces correſpondantes, ou aux quarrés des côtés homologues de leurs baſes, ou de leurs faces correſpondantes. C. Q. F. 1°. D.

2°. Les hauteurs DH, *dh* de deux priſmes ſemblables étant proportionnelles aux côtés homologues des baſes, & des faces correſpondantes de ces priſmes (n°. 604); & par conſéquent (n°. 259) les quarrés de ces hauteurs étant proportionnels aux quarrés de ces côtés, il eſt évident que les ſurfaces de deux priſmes ſemblables ne peuvent être proportionnelles aux quar-

tés des côtés homologues de leurs baſes ou de leurs faces correſpondantes, ſans être proportionnelles aux quarrés de leurs hauteurs. C. Q. F. 2°. D.

REMARQUE.

609. Les pyramides ſemblables ABC. S, *abc. s* étant auſſi terminées par un même nombre de ſurfaces ſemblables, il eſt viſible que l'on peut faire à leur égard les mêmes raiſonnemens que l'on vient de faire à l'égard du priſme. *Fig.* 304.

Ainſi on dira que les *ſurfaces totales des pyramides ſemblables ſont proportionnelles*,

1°. *Aux quarrés des côtés homologues des baſes ou les faces correſpondantes de ces pyramides.*

2°. *Aux quarrés des hauteurs de ces pyramides.*

CONSÉQUENCE.

610. Les cylindres ſemblables, droits ou obliques, ſont des priſmes ſemblables dont les baſes ont une infinité de côtés; les cônes ſemblables, droits ou obliques, ſont des pyramides ſemblables dont les baſes ont une infinité de côtés. *Fig.* 306.

Ainſi, puiſque les ſurfaces totales des priſmes ſemblables, & celles des pyramides ſemblables, ſont dans la raiſon des quarrés des côtés homologues de ces priſmes ou de ces pyramides, & que dans les cylindres ou dans les cônes, les rayons ou les diametres des baſes ſont des lignes homologues, on conclurra que *les ſurfaces totales des cylindres ou des cônes ſemblables ſont dans la raiſon des quarrés des rayons ou des diametres de leurs baſes.*

Et comme dans les cylindres ou les côtés ſemblables, les rayons des baſes ſont proportionnels aux hauteurs ou aux axes de ces cônes ou de ces cylindres, on conclurra encore que *les ſurfaces de deux cylin-*

dres ſemblables ou de deux cônes ſemblables, ſont dans la raiſon des quarrés des hauteurs, ou des quarrés des axes de ces cylindres ou de ces cônes.

PROPOSITION II.

611. *Les ſurfaces des ſpheres ſont dans la raiſon des quarrés de leurs rayons, ou de leurs diametres.*

DÉMONSTRATION.

Les ſurfaces des ſpheres ſont égales chacune à quatre fois un cercle de même diametre qu'elles (n°. 594).

Or les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres (n°. 426).

Donc les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres.

ARTICLE III.

Rapport des Solidités des corps ſemblables.

PROPOSITION I.

612. *Les ſolides des priſmes ou des cylindres ſont entr'eux comme les produits de leurs baſes & de leurs hauteurs.*

DÉMONSTRATION.

Les priſmes & les cylindres ſont égaux au produit de leurs baſes par leurs hauteurs (n°. 530).

Donc ils ſont entr'eux comme ces produits.

CONSÉQUENCE.

613. Les ſolides des pyramides & des cônes ſont égaux aux tiers des produits de leurs baſes par leurs hauteurs (nos 571, 573). Or les tiers ſont entr'eux comme les touts (n°. 248).

Donc

Donc les ſolides des pyramides ou des cônes ſont
tr'eux comme les produits de leurs baſes, par leurs
uteurs.

PROPOSITION II.

614. *Les ſolides des priſmes ſemblables* ABCX, Fig. 297
EFG; abcx, defg *ſont proportionnels*, 298.

1°. *Aux cubes des côtés homologues de leurs baſes.*

2°. *Aux cubes des côtés homologues de leurs faces
telconques correſpondantes.*

3°. *Aux cubes de leurs hauteurs.*

DÉMONSTRATION.

1°. Les ſolides des priſmes ſemblables ABCX;
EFG; *abcx*, *defg* ſont proportionnels aux cubes
es côtés homologues AB, *ab* de leurs baſes; en-
orte qu'en exprimant ces priſmes par les produits
BCX × DH, *abcx* × *dh* de leurs baſes & de
urs hauteurs auxquelles ils ſont proportionnels (n°.
13), on aura $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$.

Pour le démontrer, on conſidérera que ces priſmes
ant ſemblables, leurs baſes ABCX, *abcx* ſont des
gures ſemblables (n°. 603), & dès-lors proportion-
elles aux quarrés de leurs côtés homologues AB, *ab*
n°. 423).

Enſorte que l'on a $ABCX : abcx :: \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$.

A cauſe de la même ſimilitude de ces priſmes, les
auteurs DH, *dh* ſont proportionnelles aux côtés ho-
nologues AB, *ab* (n°. 604).

C'eſt-à-dire . . . . . $DH : dh :: AB : ab$.

Or en multipliant les termes de ces deux propoſi-
ions, il viendra (n°. 258) . . . . . .

. . $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3$.

Donc les ſolides des priſmes ſemblables ſont pro-

proportionnels (n°. 604), on a (n°. 259)

. . . . . $\overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 :: \overline{B}$

Mais on vient de trouver . . . .

. . . $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{A}$

Donc (n°. 245) $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{B}$
C. Q. F. 2°. D.

3°. On a $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{DI}$

C'eſt-à-dire, que les priſmes ſemblables ſor
portionnels aux cubes de leurs hauteurs : c
604) les côtés homologues quelconques AB, *a*
priſmes ſont proportionnels aux hauteurs DH,
par conſéquent on a (n°. 259) $\overline{AB}^3 : \overline{ab}^3 :: \overline{D}$
Or on a trouvé $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{I}$
Donc (n°. 245) $ABCX \times DH : abcx \times dh :: \overline{D}$
C. Q. F. 3°. D.

Conſéquence.

615. Les cylindres ſemblables, droits ou ob

des cylindres ſont des lignes homologues de ces (n°. 293), il eſt évident que les *ſolides des cy-s ſemblables ſont dans la raiſon des cubes des s ou des diametres de leurs baſes.*

comme (n°. 605) les hauteurs des cylindres ſem-es ſont proportionnelles aux rayons ou aux dia-es des baſes de ces cylindres, & que par conſé-t les cubes de ces hauteurs ſont proportionnels ubes de ces rayons, ou des diametres des baſes 259), il eſt encore viſible que les *ſolides des cy-s ſemblables ſont dans la raiſon des cubes de leurs urs.*

PROPOSITION III.

6. *Les ſolides des pyramides ſemblables* ABC. S; *Fig.* 303 s *ſont proportionnels,* 304.

. Aux cubes des côtés homologues de leurs baſes.

. Aux cubes des côtés homologues de leurs faces onques correſpondantes.

. Aux cubes de leurs hauteurs ou des lignes quel-tes tirées de leurs ſommets à des points ſemblable-poſés dans leurs baſes.

eſt-à-dire, qu'en exprimant les ſolides de ces py-des par les produits de leurs baſes & de leurs eurs, auxquelles ils ſont proportionnels (n°. 613),

$$a\begin{cases} 1°.\ ABC \times SH :: abc \times sh :: \overline{AB}^3 : \overline{ab}^3. \\ 2°.\ ABC \times SH :: abc \times sh :: \overline{SB}^3 : \overline{sb}^3. \\ 3°.\ ABC \times SH :: abc \times sh :: \overline{SH}^3 : \overline{sh}^3. \end{cases}$$

a démonſtration eſt exactement la même que celle l'on a donné touchant le rapport des ſolides des nes ſemblables (n°. 614).

CONSÉQUENCE.

17. Les cônes ſemblables, droits ou obliques, ſont *Fig.* 305 306.

des pyramides ſemblables dont les baſes ont une infinité de côtés.

Ainſi les ſolides des cônes ſemblables ſont dans la raiſon des cubes des rayons ou des diametres de leurs baſes, ou dans la raiſon des cubes de leurs hauteurs; ou enfin dans la raiſon des cubes de leurs axes, ou des droites quelconques menées de leurs ſommets à des points ſemblablement poſés dans leurs baſes.

PROPOSITION IV.

618. *Les ſpheres ſont proportionnelles aux cubes de leurs diametres.*

DE'MONSTRATION.

Soient nommés C, *c* les cercles de même diametre que deux ſpheres quelconques S, *s* & D, *d*, les diametres de ces cercles ou de ces ſpheres.

Puiſque le ſolide de la ſphere eſt égal au produit d'un cercle de même diametre qu'elle, par les deux tiers de ſon diametre (n°. 599), les ſolides des deux ſpheres quelconques S, *s* ſeront exprimés, celui de la premiere par $\frac{2CD}{3}$, celui de la ſeconde par $\frac{2cd}{3}$, & ſeront évidemment proportionnels aux produits entiers CD, *cd* (n°. 248).

Ainſi on aura démontré que les ſpheres S, *s* ſont proportionnelles aux cubes de leur diametre, ſi on démontre que $CD : cd :: \overline{D}^3 : \overline{d}^3$.

On le démontrera ainſi : les cercles étant entr'eux comme les quarrés de leurs diametres (n°. 426), on a cette proportion . . . . $C : c :: D^2 : d^2$.

Et en multipliant cette proportion par celle-ci . . . . . $D : d :: D : d$, laquelle eſt formée par la répétition de la raiſon des

diametres, on aura (n°. 258) $CD : cd :: D^3 : d^3$.

Donc les ſolides des ſpheres ſont dans la raiſon des cubes de leurs diametres. C. Q. F. D.

PROPOSITION V.

619. *Lorſque quatre lignes* AB, BC, CD, DE *ſont en progreſſion géométrique, le cube de la premiere eſt au cube de la ſeconde comme la premiere eſt à la quatrieme.*

C'eſt-à-dire, que ſi l'on a $\therefore$ AB : BC : CD : DE, on aura . . . . . $\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE$.

DÉMONSTRATION.

Les quatre lignes AB, BC, CD, DE étant en progreſſion géométrique, elles forment évidemment une proportion géométrique.

Et les trois premiers AB, BC, CD, forment une proportion continue, dans laquelle le quarré de la premiere eſt au quarré de la ſeconde comme la premiere eſt à la troiſieme (n°. 427). Enſorte que l'on a :

1°. AB : BC :: CD : DE.

2°. $\overline{AB}^2 : \overline{BC}^2 :: AB : CD$.

Or en multipliant les termes de ces deux proportions, il vient (n°. 258) $\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB \times CD : DE \times CD$.

Et en diviſant les deux derniers termes par CD, il vient (n°. 247) . . . $\overline{AB}^3 : \overline{BC}^3 :: AB : DE$. C. Q. F. D.

CONSÉQUENCE.

620. Donc *quatre lignes étant en progreſſion géométrique, deux priſmes ou deux pyramides ſemblables qui auroient pour côtés homologues la premiere & la ſe-*

conde, ſeroient entr'eux comme la premiere ligne eſt à la quatrieme.

Car les priſmes (n°. 614), ou les pyramides (n°. 616) ſemblables, ſont entr'eux comme les cubes de leurs côtés homologues.

Et une ſphere qui auroit pour diametre la premiere de ces quatre lignes en progreſſion, ſeroit à la ſphere qui auroit la ſeconde pour diametre, comme la premiere de ces lignes eſt à la quatrieme.

Parce que les ſpheres ſont entr'elles comme les cubes de leurs diametres (n°. 618).

CHAPITRE DOUZIEME.

Application du Chapitre onzieme.

SECTION PREMIERE.

Toiſé des Solides.

DÉFINITIONS.

621. TOISER *un ſolide*, c'eſt déterminer le nombre des toiſes cubes, & de parties de toiſes cubes que le ſolide contient.

622. La *toiſe cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large & 6 pieds de hauteur.

623. Les parties régulieres de la toiſe cube, ſont les *pieds cubes*, les *pouces cubes*, les *lignes cubes*, &c.

Le *pied cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a 12 pouces de long, 12 pouces de large & 12 pouces de hauteur.

Le *pouce cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a 12 lignes de long, 12 lignes de large, & 12 lignes de hauteur.

Une *ligne cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a 12 points de long, 12 points de large, & 12 points de hauteur.

624. Les parties irrégulieres de la toiſe cube, ſe nomment *pieds de toiſe cube*, *pouces de toiſes cubes*, *lignes de toiſe cube*, *priſmes de toiſe cube*, &c.

Un *pied de toiſe cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur un pied de hauteur.

Un *pouce de toiſe cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur un pouce de hauteur.

Une *ligne de toiſe cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur une ligne de hauteur.

Une *priſme de toiſe cube* eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur un point de hauteur ; & ainſi des autres.

TABLE

625. Des expreſſions de la toiſe cube & de ſes parties régulieres.	*Des valeurs de la toiſe cube, & de ſes parties régulieres.*
La toiſe cube ſera exprimée par . . . . . TTT	1^{TTT} contient 216^{PPP}
Le pied cube par . . . PPP	1^{PPP} . . . . 1728^{ppp}
Le pouce cube par . . . *ppp*	1^{ppp} . . . . 1728^{LLL}
La ligne cube par . . . LLL	

Démonſtration de la valeur de la toiſe cube, & de ſes parties régulieres.

626. Il eſt démontré (n°. 534) que lorſque les trois dimenſions d'un parallélepipede ſont exprimées en meſures linéaires égales, le produit de ces trois dimenſions multipliées enſemble, eſt le nombre des meſures cubes contenues dans ce parallélepipede, leſquelles ont chacune pour côté la meſure linéaire dont on s'eſt ſervi pour meſurer les trois dimenſions.

Or la toiſe cube eſt un parallélepipede rectangle qui a 6 pieds de long, 6 pieds de large, 6 pieds de hauteur, & le produit de ces trois nombres 6, 6, 6, multiplié enſemble, eſt 216.

Donc la toiſe cube contient 216 pieds cubes.

Le pied cube eſt un parallélepipede rectangle qui a

12 pouces de long, 12 pouces de large, 12 pouces de hauteur, & le produit de ces trois nombres 12, 12, 12, multipliés enſemble, eſt 1728.

Donc le pied cube contient 1728 pouces cubes.

L'on démontrera de la même façon que le pouce cube contient 1728 lignes cubes.

TABLE

527. *Des expreſſions des parties irrégulieres de la toiſe cube.*	*Des valeurs de la toiſe cube & de ſes parties irrégulieres.*			
Le pied de toiſe cube ſera exprimé par . . . . . TTP	1^{TTT}	contient	6^{TTP}	
Le pouce de toiſe cube par TT*p*	1^{TTP}		12^{TTp} ou	36^{PPP}
La ligne de toiſe cube par TTL	1^{TTp}		12^{TTL} ou	3^{PPP}
La prime de toiſe cube par TT′	1^{TTL}		$12^{TT'}$ ou	$\frac{1}{4}^{PPP}$
La ſeconde de toiſe cube par TT″	$1^{TT'}$		$12^{TT''}$ ou	36^{PPP}
La tierce de toiſe cube par TT‴	$1^{TT''}$		$12^{TT'''}$ ou	3^{PPP}
La quarte de toiſe cube par TT′ᵛ	$1^{TT'''}$		$12^{TT'v}$ ou	$\frac{1}{4}^{PPP}$
La quinte de toiſe cube par TTᵛ	$1^{TT'v}$		12^{TTv} ou	36^{LLL}
La ſixte de toiſe cube par TTᵛ′	1^{TTv}		$12^{TTv'}$ ou	3^{LLL}
	$1^{TTv'}$		$12^{TTv''}$ ou	$\frac{1}{4}^{LLL}$

Démonſtration de la valeur de la toiſe cube, & de ſes parties irrégulieres.

628. Une toiſe quarrée, multipliée par un pied ou par un pouce, ou par une ligne, &c. eſt (n°. 532) un pied de toiſe cube, ou un pouce de toiſe cube, ou une ligne de toiſe cube, &c. c'eſt-à-dire, un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur un pied ou un pouce, ou une ligne, &c. de hauteur.

Or, 1°. une toiſe cube eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur 6 pieds de hauteur, & elle eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur (n°. 530),

Donc la toiſe cube contient 6 pieds de toiſe cube.

2°. Un pied de toiſe cube eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur 12 pouces de hauteur, & il eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur (n°. 530).

Donc le pied de toiſe cube renferme 12 pouces de toiſe cube.

Et comme une toiſe quarrée qui vaut 36 pieds quarrés, multipliée par un pied de hauteur, donne 36 pieds cubes (n°. 533), il eſt encore évident que le pied de toiſe cube vaut 36 pieds cubes.

3°. Le pouce de toiſe cube eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur 12 lignes de hauteur, & il eſt égal au produit de ſa baſe par ſa hauteur (n°. 530).

Donc le pouce de toiſe cube contient 12 lignes de toiſe cube.

Et comme un pouce de toiſe cube eſt la douzieme partie d'un pied de toiſe cube, qui vaut 36 pieds cubes; le pouce de toiſe cube vaut 3 pieds cubes.

4°. La ligne de toiſe cube eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur 12 points de hauteur, & elle eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur (n°. 530).

Donc la ligne de toiſe cube contient 12 priſmes ou 12 points de toiſe cube.

Et comme la ligne de toiſe cube eſt la douzieme partie du pouce de toiſe cube qui vaut trois pieds cubes, la ligne de toiſe cube vaudra $\frac{1}{4}$ d'un pied cube, ou 432 pouces cubes, parce que le pied cube vaut 1728 pouces cubes, & que le quart de 1728 eſt 432.

5°. La prime de toiſe cube eſt un parallélepipede rectangle qui a une toiſe quarrée de baſe ſur 12 ſecondes de hauteur, & elle eſt égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur.

Donc la prime de toiſe cube contient 12 ſecondes de toiſe cube.

Et comme la prime de toiſe cube eſt la douzieme partie de la ligne de toiſe cube qui vaut 432 pouces cubes, & que le douzieme de 432 eſt 36, la prime de toiſe cube vaudra 36 pouces cubes.

En faiſant les mêmes raiſonnemens, on démontrera que la ſeconde de toiſe cube contient 12 tierces de toiſe cube, & qu'elle vaut 3 pouces cubes.

Que la tierce de toiſe cube contient 12 quartes de toiſe cube, & qu'elle vaut $\frac{1}{4}$ de pouce cube, ou 432 lignes cubes; & ainſi de ſuite.

Principes du Toiſé des ſolides.

629. Les priſmes & les cylindres étant égaux aux produits de leurs baſes par leurs hauteurs;

Les pyramides & les cônes étant égaux au produit de leurs baſes, par le tiers de leurs hauteurs;

La ſphere étant égale au produit d'un cercle de même diametre qu'elle par les deux tiers de ſon diametre;

En général, les ſolides étant égaux chacun au produit de la multiplication d'une ſurface par une ligne, comme l'on eſt déja inſtruit du toiſé des ſurfaces, il eſt évident que le toiſé des ſolides ſe réduit à donner la maniere de multiplier une ſurface exprimée en toiſes quarrées, & parties de toiſes quarrées, par un nombre complexe ou incomplexe de toiſes linéaires.

Ce calcul ſe fera de même que celui des ſurfaces par le moyen des parties aliquotes.

Les principes du toiſé des ſolides ſont:

1°. Le produit d'un nombre de toiſes quarrées par un nombre de toiſes linéaires, eſt un nombre de toiſes cubes (n°. 533).

2°. Si l'on multiplie une toiſe quarrée par un pied

ou par un pouce, ou par une ligne, ou ſi l'on multiplie une toiſe pied, ou une toiſe pouce, ou une toiſe ligne, par une toiſe linéaire, le produit ſera également ou un pied de toiſe cube, ou un pouce de toiſe cube, ou une ligne de toiſe cube, c'eſt-à-dire, un ſolide dont deux dimenſions ſeront chacune égale à une toiſe, & dont la troiſieme ſera ou un pied, ou un pouce, ou une ligne, &c. (n°. 532).

PROBLÊME I.

630. *Multiplier* . . . $22^{TT}\ 3^{TP}\ 6^{Tp}$

par . . . . . $4^{T}\ 2^{P}\ 8p$

SOLUTION.

1°. Le nombre des toiſes du multiplicateur étant exprimé par un ſeul chiffre, on multipliera le multiplicande par ce nombre de toiſes, en commençant par les parties du multiplicande, dont les unités ſont de la moindre valeur, & en allant de ſuite aux autres; & l'on obſervera de réduire les meſures ſolides qui réſulteront de chaque multiplication aux meſures ſolides immédiatement plus grandes.

2°. Pour avoir le produit du multiplicande par les pieds du multiplicateur, on imaginera le multiplicande multiplié par une toiſe, l'on en diviſera le produit proportionnellement à ce que les pieds du multiplicateur ſont à l'égard de la toiſe, & le quotient ſera le produit cherché.

3°. On diviſera ce dernier produit proportionnellement à ce que les pouces du multiplicateur ſont à l'égard des pieds du même multiplicateur, & le quotient ſera le produit du multiplicande par les pouces du multiplicateur; & ainſi de ſuite.

4°. Enfin on ajoutera tous les produits particuliers,

la ſomme ſera le produit cherché. Voici le détail s opérations.

OPÉRATION.

Multiplicande	22^{TT}	3^{TP}	6^{Tp}	
Multiplicateur	4^{T}	2^{P}	$8p$	
Produits du multiplicande				
ir 4^{T}	90^{TTT}	2^{TTP}	0^{TTp}	0^{TTt}
ir 2^{P}	7	3	2	0
ir $8p$	2	3	0	8
Somme ou produit total	100^{TTT}	2^{TTP}	2^{TTp}	8^{TTt}

1°. L'on multipliera les 6^{Tp} du multiplicande par s 4^{T} du multiplicateur ; ce qui produira 24^{TTp} ; eſt-à-dire, 24 parallélepipedes rectangles qui ont acun une toiſe de long, une toiſe de large, & un uce de hauteur, & qui ſont par conſéquent 24 pous de toiſe cube ; l'on écrira donc zero au rang des uces de toiſe cube, & l'on retiendra 2^{TTP} pour les indre aux autres pieds de toiſe cube que l'on va ouver.

2°. On multipliera les 3 toiſes pieds du multiplinde par les 4^{T} du multiplicateur ; ce qui produira 2^{TTP}, c'eſt-à-dire, 12 parallélepipedes rectangles qui nt chacun une toiſe de long, une toiſe de large, & n pied de hauteur, & qui ſont par conſéquent 12 ieds de toiſe cube, leſquels ajoutés avec 2^{TTP} retenus, font 14^{TTP} : comme ce nombre de pieds de toiſe ube contient 2 toiſes cubes & 2 pieds de toiſe cube, n écrira 2^{TTP}, & l'on retiendra 2^{TTT} pour les ajouer aux toiſes cubes que l'on va trouver.

3°. On multipliera les 22^{TT} du multiplicande par s 4^{T} du multiplicateur ; ce qui produira 88^{TTT}, leſquelles ajoutées aux 2^{TTT} retenues, font 90 toiſes cues : on écrira donc 90^{TTT}.

4°. Pour avoir le produit de tout le multiplicande par les 2^{P} du multiplicateur, on considérera que si le multiplicande étoit multiplié par une toise, on auroit pour le produit $22^{TTT}\ 3^{TTP}\ 6^{TTp}$. Donc puisqu'il ne doit être multiplié que par 2^{P} qui sont le tiers d'une toise, le produit cherché ne doit être que le tiers de $22^{TTT}\ 3^{TTP}\ 6^{TTp}$, & l'on trouvera que ce tiers est $7^{TTT}\ 3^{TTP}\ 2^{TTp}$.

5°. Pour avoir le produit de tout le multiplicande par les $8p$ du multiplicateur, on considérera que 8 pouces sont le tiers de 2^{P}; ainsi le produit de la multiplication par $8p$ ne doit être que le tiers du produit de la multiplication par 2^{P}, & l'on trouvera que ce tiers est $2^{TTT}\ 3^{TTP}\ 0^{TTp}\ 8^{TTL}$.

6°. Enfin on ajoutera ensemble tous les produits particuliers que l'on vient de faire, & la somme $100^{TTT}\ 2^{TTP}\ 2^{TTp}\ 8^{TTL}$ sera le produit total cherché.

PROBLÊME II.

631. *Multiplier* . . . . . $22^{TT}\ 3^{TP}\ 4^{Tp}$
par . . . . . $12^{T}\ 2^{P}\ 8p$

SOLUTION.

Le nombre des toises du multiplicateur étant exprimé par plus d'un chiffre, on commencera la multiplication par la partie du multiplicande dont les unités sont les plus grandes; c'est-à-dire, que l'on multipliera d'abord les toises quarrées du multiplicande par les toises linéaires du multiplicateur: ce qui produira (n°. 533) un nombre de toises cubes.

Pour avoir le produit de la multiplication des toises pieds du multiplicande par les toises du multiplicateur, on imaginera le produit d'une toise quarrée multipliée par les toises du multiplicateur, l'on divisera ce produit proportionnellement à ce que les toi

du multiplicande ſont à l'égard d'une toiſe
ſe, & le quotient ſera le produit cherché.

diviſera ce dernier produit proportionnelle-
à ce que les toiſes pouces du multiplicande ſont
rd des toiſes pieds du même multiplicande.
e ſi le multiplicande contenoit des toiſes lignes,
trouveroit le produit en diviſant le produit des
pouces proportionnellement à ce que ces toiſes
ſont à l'égard des toiſes pouces, & ainſi de

utes les parties du multiplicande étant multi-
par les toiſes du multiplicateur, on multipliera
ltiplicande ſucceſſivement par les pieds & les
s, &c. du multiplicateur, comme on l'a enſei-
ans la ſolution du problême précédent (n°. 630).
in on ajoutera tous les produits particuliers que
ura trouvés, & leur ſomme ſera le produit total
ié.

OPÉRATION.

ltiplicande . . .	22^{TT}	3^{TP}	4^{Tp}		
ltiplicateur . . .	12^{T}	2^{P}	8^{p}		
it de 22^{TT} par 12^{T}	264^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTp}	0^{TTL}	$0^{TT'}$
it de 3^{TP} par 12^{T}	6	0	0	0	0
it de 4^{Tp} par 12^{T}	0	4	0	0	0
: du multiplicande par 2^{P}	7	3	1	4	0
: du multiplicande par 8^{p}	2	3	0	5	4
ıe ou produit total	280^{TTT}	4^{TTP}	1^{TTp}	9^{TTL}	$4^{TT'}$

L'on multipliera les 22^{TT} du multiplicande par
^{T} du multiplicateur; ce qui donnera 264^{TTT}.
Pour avoir le produit des 3^{TP} du multiplicande
12^{T} du multiplicateur, on obſervera que ſi on
^{TT} à multiplier par 12^{T}, le produit ſeroit 12^{TTT};
^{TP} étant la moitié de 1^{TT}, le produit cherché

ne doit être que la moitié de 12^{TTT}, c'eſt-à-dire, 6^{TTT}.

3°. Pour avoir le produit des $4^{T}p$ du multiplicande par les 12^{T} du multiplicateur, on conſidérera que ces $4^{T}p$ n'étant que le neuvieme de 3^{TP}, dont le produit eſt 6^{TTT}, le produit de $4^{T}p$ ne doit être que la neuvieme partie de 6^{TTT}, & cette neuvieme partie eſt 4^{TTP}.

4°. Pour avoir le produit du multiplicande par les 2^{P} du multiplicateur, on remarquera que le produit du multiplicande par 1^{T}, ſeroit $22^{TTT}\ 3^{TTP}\ 4^{TTp}$; ainſi 2^{P} n'étant que le tiers de 1^{T}, le produit de la multiplication par 2^{P}, ne doit être que le tiers de $22^{TTT}\ 3^{TTP}\ 4^{TTp}$, & l'on trouvera que ce tiers eſt $7^{TTT}\ 3^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$.

5°. Pour avoir le produit du multiplicande par les $8p$ du multiplicateur, on fera attention que ces $8p$ ne ſont que le tiers des 2^{P} qui ont produit $7^{TTT}\ 3^{TTP}\ 1^{TTp}\ 4^{TTL}$; ainſi le produit de la multiplication par $8p$, ne ſera que le tiers de $7^{TTT}\ 3^{TTP}\ 1^{TTL}$; & ce tiers eſt $2^{TTT}\ 3^{TTP}\ 0^{TTp}\ 5^{TTL}\ 4^{TT'}$.

6°. Enfin on ajoutera enſemble tous les produits particuliers que l'on vient de trouver, & la ſomme $280^{TTT}\ 4^{TTP}\ 1^{TTp}\ 9^{TTL}\ 4^{TT'}$, ſera le produit total cherché.

PROBLÊME III.

632. *Multiplier* . . . . $22^{TT}\ 0^{TP}\ 6^{T}p$

par . . . . . $12^{T}\ 2^{P}\ 0p\ 8^{L}$.

SOLUTION.

Ce qui rend ce problême différent des deux précédens, c'eſt que le multiplicande ne contenant point de toiſes pieds, on ne peut prendre le produit des $6^{T}p$ du

multiplicande par les 12^{T} du multiplicateur ſur le oduit des toiſes pieds.

De même le multiplicateur ne contenant point de uces, on ne peut prendre le produit du multipli- ıde par les lignes du multiplicateur, ſur le produit la multiplication par les pouces.

Mais dans l'exemple propoſé on pourra ſuppoſer ns le multiplicande 1^{TP}, qui eſt le ſixieme de 1^{TT}, dont les $6^{T}p$ ſont la moitié.

De même on pourra ſuppoſer au multiplicateur 4 uces qui ſont le ſixieme de 2 pieds, & dont les 8 li- es ſont auſſi le ſixieme.

Et comme 1^{TP} que l'on donnera au multiplicande, les 4 pouces que l'on donnera au multiplicateur, nt des unités ſuppoſées, leurs produits le ſeront ſſi, & n'entreront point dans le produit total, c'eſt urquoi, pour diſtinguer ces unités ſuppoſées & les oduits qui en réſulteront, on les coupera par des irs.

L'exemple propoſé ſe changera donc en celui-ci

Multiplicande. 22^{TT} 1^{TP} $6^{T}p$ 0

Multiplicateur. 12^{T} 2^{P} 4^{p} 8^{L}

oduit de 22^{TT} par 12^{T}	264^{TTT}	0^{TTP}	0^{TTp}	0^{TTL}	0^{TTt}
oduit de 1^{TP} par 12^{T}	1	0	0	0	0
oduit de $6^{T}p$ par 12^{T}	1	0	0	0	0
oduit du multiplicandē par 2^{P}	7	2	2	0	0
oduit du multiplicande par 4^{p}	1	1	4	4	4
oduit du multiplicande par 8^{L}	0	1	2	8	8
mme ou produit total	272^{TTT}	3^{TTP}	4^{TTp}	8^{TTL}	8^{TTt}

ſes pouces en les multipliant par le multiplica
marque quelle aliquote elles ſont à l'égard d'u
pied, ou à l'égard d'un nombre de toiſes pie
cette multiplication les toiſes pouces du divi
ront changées en une ou pluſieurs toiſes pi
pour que le quotient cherché reſte toujours le
on multipliera par le même multiplicateur to
autres parties du diviſeur, & toutes les partie
vidende.

Que ſi, après cette multiplication, il y a
des toiſes pieds dans le nouveau diviſeur, on
diſparoître en multipliant le nouveau diviſeu
nouveau dividende par le multiplicateur qui
quelle aliquote les toiſes pieds du nouveau
ſont à l'égard de la toiſe quarrée, ou à l'éga
nombre de toiſes quarrées.

2°. Le diviſeur complexe étant devenu u
bre incomplexe de toiſes quarrées, on diviſer
nombre incomplexe toutes les parties du di
qui eſt venu de la derniere multiplication, &
tient ſera évidemment le même que l'on eû

OPÉRATION.

Dividende. Diviſeur.

$280^{TTT}\ 4^{TTP}\ 1^{TT}p\ 9^{TTL}\ 4^{TT}\prime \quad \{ 22^{TT}\ 3^{TP}\ 4^{T}p$

3 3

$842^{TTT}\ 0^{TTP}\ 5^{TT}p\ 4^{TTL}\ 0^{TT}\prime \quad \{ 67^{TT}\ 4^{TP}\ 0^{T}p$

3 3

Dividende préparé. Diviſeur préparé.

$1526^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TT}p\ 0^{TTL} \quad \{ 203^{TT}\ 0^{TP}$

103	541^{TTP}	$1624^{TT}p$	$\{ 12^{T}$	1^{P}	$8p$ Quotient.
496	406	1624			
406	135	0000			
90	12				
6	$1620^{TT}p$				
540^{TTP}.					

1°. On fera diſparoître les $4^{T}p$ du diviſeur en multipliant le diviſeur & le dividende par 3, parce que p ſont le tiers de 1^{TP}.

Et l'on aura de cette premiere multiplication le nouveau dividende $842^{TTT}\ 0^{TTP}\ 5^{TT}p\ 4^{TTL}$, & le nouveau diviſeur $67^{TT}\ 4^{TTP}$.

Comme il faut encore faire diſparoître dans le nouveau diviſeur les 4^{TTP} qui ſont le tiers de deux toiſes quarrées, on multipliera encore par 3 le nouveau diviſeur & le nouveau dividende; ce qui donnera le nouveau dividende $2526^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TT}p$, & le nouveau diviſeur 203^{TT}.

2°. Le diviſeur & le dividende étant ainſi préparés, on diviſera ſucceſſivement toutes les parties du dividende préparé par le diviſeur devenu un nombre complexe de toiſes quarrées.

D'abord on diviſera les 2526^{TTT} par le diviſeur

203^{TT}, le quotient ſera 12^{T}, avec un reſte de 9

Enſuite on réduira ce reſte 90^{TTT} en pieds de cube, en le multipliant par 6, & l'on ajoute produit 1^{TTP} qui eſt au dividende préparé, la ſo ſera 541^{TTP} que l'on diviſera par 203^{TT}, le quo ſera 2^{P} avec un reſte de 135^{TTP}.

Enfin on réduira ce reſte 135^{TTP} en pouces de cube, en le multipliant par 12, & on ajoutera au duit les 4^{TTp} qui ſont au dividende préparé, la ſ me ſera 1624^{TTp} que l'on diviſera par 203^{TTp} quotient ſera exactement $8p$.

Ainſi le quotient total de la diviſion ſera $12^{T}\,2^{P}$

634. Si l'on propoſoit

de diviſer . . . . $280^{TTT}\,4^{TTP}\,1^{TTp}\,9^{TTL}$

par . . . . . $12^{T}\;\;2^{P}\;\;8p$,

on multiplieroit le diviſeur & le dividende par nombres propres à faire diſparoître les pouces & pieds du diviſeur.

Après quoi on diviſeroit, comme on vient d faire, le dividende préparé, par le diviſeur de un nombre incomplexe de toiſes linéaires.

Et l'on trouveroit pour quotient la ſurface $22^{TT}\,4^{T}p$.

PROBLÊME V.

635. *Vérifier le toiſé des ſolides.*

SOLUTION.

Comme le toiſé d'un ſolide s'eſt fait en multipl un nombre incomplexe de toiſes quarrées, ou nombre complexe de toiſes quarrées & de partie toiſes quarrées, par un nombre incomplexe de t linéaires, ou par un nombre complexe de toiſe néaires & de parties de toiſe linéaire; & que l'o aſſuré qu'un produit de deux produiſans eſt bien

rſqu'en le diviſant par l'un des produiſans, on trou-e l'autre au quotient, on conclurra que pour s'aſſu-r qu'on ne s'eſt pas trompé dans le toiſé d'un ſolide, faut diviſer la valeur du ſolide par la ſurface qui a rvi de multiplicande, ſi le calcul s'eſt fait exacte-ent, on trouvera pour le quotient le nombre com-lexe ou incomplexe de toiſes linéaires, qui a ſervi multiplicateur.

On pourra auſſi diviſer la valeur du ſolide par le ombre complexe ou incomplexe de toiſes linéaires, ui a ſervi de multiplicateur; & ſi le toiſé eſt exact, n trouvera pour quotient la ſurface qui a ſervi de ultiplicande.

PROBLÊME VI.

636. Un ſolide étant évalué en toiſes cubes, pieds e toiſe cube, pouces & lignes, &c. de toiſe cube, re-uire en pieds cubes, pouces cubes, lignes cubes, les ties moindres que la toiſe cube.

SOLUTION.

Rien n'eſt plus aiſé à réſoudre, après la table dé-ontrée des valeurs des parties irrégulieres de la toiſe ube, c'eſt-à-dire, des pieds de toiſe cube, des pou-es, lignes, prïmes, &c. de toiſe cube.

1°. Puiſque le pied de toiſe cube vaut 36 pieds cubes, que le pouce de toiſe cube vaut 3 pieds cubes, que la ligne de toiſe cube vaut $\frac{1}{4}$ de pied cube, eſt évident que l'on réduira en pieds cubes les pieds e toiſe cube, en les multipliant par 36.

On réduira en pieds cubes les lignes de toiſe cube, les multipliant par $\frac{1}{4}$, ou en les diviſant par 4; ſi cette diviſion ne ſe fait pas exactement, comme aque ligne de toiſe cube vaut 432 pouces cubes, multipliera 432 par le reſte de la diviſion, & le

par $\frac{1}{4}$, ou en les diviſant par 4 ; & ſi la divi
lignes de toiſe cube ne ſe fait pas ſans reſte,
chaque tierce de toiſe cube vaut 432 ligne
on multipliera 432 par le reſte de cette divi
le produit ſera la valeur des tierces de toiſe c
tantes exprimées en lignes cubes.

3°. Puiſque la quarte de toiſe cube vaut 36 ligne
que la quinte de toiſe cube vaut 3 ligne
que la ſixte de toiſe cube vaut $\frac{1}{4}$ de lig
il eſt évident qu'on réduira en lignes cubes l
tes, les quintes, & les ſixtes de toiſe cube, e
pliant les quartes par 36, les quintes par 3
ſixtes par $\frac{1}{4}$, ou en les diviſant par 4.

Que ſi la diviſion des ſixtes de toiſe cube n
ſoit point exactement, le reſte pourra ſe n
comme étant preſque de nulle valeur.

EXEMPLE.

637. *Evaluer en pieds cubes, pouces cubes, lignes cubes, les parties moindres que la toiſe cube d'un ſolide qui contient :*

$2^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 5^{TTL}\ 2^{TT'}\ 4^{TT''}\ 6^{TT'''}\ 2^{TT'v}\ 3^{TTv}\ 5^{TTv'}$.

OPÉRATION.

$2^{TTT}\ 2^{TTP}\ 3^{TTp}\ 5^{TTL}\ 2^{TT'}\ 4^{TT''}\ 6^{TT'''}\ 2^{TT'v}\ 3^{TTv}\ 5^{TTv'}$.

36 3 $\frac{1}{4}$ 36 3 $\frac{1}{4}$ 36 3 $\frac{1}{4}$

72^{PPP}	432^{PPp}	864^{LLL}
9	72	72
1	12	9
	1	1

$10^{TTT}\ 82^{PPP}$ . . . 517^{PPp} . . . 946^{LLL} points cubes.

1°. On placera les multiplicateurs { 36 ſous les TTP ; 3 ſous les TTp ; $\frac{1}{4}$ ſous les TTL

On placera les multiplicateurs { 36 ſous les TT' ; 3 ſous les TT'' ; $\frac{1}{4}$ ſous les TT'''

On placera les multiplicateurs { 36 ſous les TT'v ; 3 ſous les TTv ; $\frac{1}{4}$ ſous les TTv'.

2°. On fera toutes ces multiplications indiquées; es 2^{TTP} multipliées par 36, donneront 72^{PPP} que l'on crira au-deſſous des TTP.

Les 3^{TTp} multipliés par 3 donneront 9^{PPP} que l'on crira au-deſſous des 72^{PPP}.

Les 5^{TTL} multipliés par $\frac{1}{4}$, donneront 1^{PPP} que l'on on écrira au-deſſous des 9^{PPP}.

Et comme il reſtera $2^{TT'''}$ qui valent chacune
on multipliera 432 par 2, & l'on écrira le
864^{LLL} dans une troiſieme colonne.

Les $2^{TT'v}$ multipliés par 36, donneront 72^{l}
l'on écrira ſous les 864^{LLL}.

Les 3^{TTv} multipliés par $\frac{3}{4}$, donneront 9^{LLL} q
écrira ſous les 72^{LLL}.

Les $5^{TTv'}$ multipliés par $\frac{1}{4}$, donneront 1^{LLL} q
écrira ſous les 9^{LLL}.

Il reſtera $1^{TTv'}$ que l'on peut négliger, ou q
évaluera en 432 points cubes.

3°. Toutes ces multiplications étant faites, o
tera enſemble toutes les meſures cubes de la
eſpece, & l'on trouvera que le ſolide propoſé c
10^{TTT} 82^{PPP} 517^{PPP} 946^{LLL} 432 points cubes.

PROBLÊME VII.

638. *Extraire la racine cubique d'un ſolide é*
toiſes cubes, pouces cubes, lignes cubes, &c.

SOLUTION.

es meſures cubes qu'il renferme, on en extraira la
:ine cubique ſelon les regles que l'on a données dans
Calcul, relativement à l'extraction de la racine cu-
que.

3°. Comme la racine que l'on trouvera ſera un
mbre des petites meſures linéaires, qui ſont les cô-
; des plus petites meſures cubes, auxquelles le ſo-
le aura été réduit, on la réduira aux grandes meſu-
s qu'elle contient, en la diviſant ſucceſſivement par
; nombres qui marquent les rapports de la ligne au
uce, du pouce au pied, & du pied à la toiſe, &c.

SECTION II.

Toiſé des Bois.

39. LA meſure dont on ſe ſert pour les pieces de
ois, ſe nomme *ſolive*.

La *ſolive* eſt un parallélepipede rectangle qui a une
iſe de long ſur une baſe d'un demi-pied quarré.

640. La ſolive ſe diviſe en 6 parties égales que l'on
mme *pieds de ſolive*.

Le *pied de ſolive* ſe diviſe en douze parties égales
e l'on nomme *pouces de ſolive*.

Le *pouce de ſolive* ſe diviſe en 12 parties égales que
on nomme *lignes de ſolive*, &c.

Le *pied de ſolive* eſt un parallélepipede rectangle
i a un demi-pied quarré de baſe ſur un pied de
auteur.

Le *pouce de ſolive* eſt un parallélepipede rectangle
ui a un demi-pied quarré de baſe ſur un pouce de
auteur.

La *ligne de ſolive* eſt un parallélepipede rectangle qui
un demi-pied quarré de baſe, & une ligne de hau-
ur.

CONSÉQUENCE.

641. Des définitions de la ſolive & de ſes parties, il ſuit :

1°. *Que la ſolive eſt la 72e partie de la toiſe cube.*

Car la ſolive ayant un demi-pied quarré de baſe ſur 6 pieds de hauteur, elle contient évidemment 6 demi-pieds cubes, ou 3 pieds cubes.

Or la toiſe contient 216 pieds cubes ; & en diviſant 216 par 3, on trouve 72 pour quotient : donc la toiſe cube contient 72 ſolives.

2°. *Le pied de ſolive eſt la 72e partie du pied de toiſe cube.*

Car le pied de ſolive eſt la ſixieme partie de la ſolive, de même que le pied de toiſe cube eſt la ſixieme partie de la toiſe cube.

Or les ſixiemes parties de deux touts ſont entr'elles comme ces touts ; & l'on vient de voir que la ſolive eſt la 72e partie de la toiſe cube.

Donc le pied de ſolive eſt auſſi la 72e partie du pied de toiſe cube.

Le pouce de ſolive étant la douzieme partie du pied de ſolive, de même que le pouce de toiſe cube eſt la douzieme partie du pied de toiſe cube, on conclurra que le pouce de ſolive n'eſt auſſi que la 72e partie du pouce de toiſe cube.

Et l'on démontrera de la même façon que la ligne de ſolive n'eſt que la 72e partie de la ligne de toiſe cube.

PROBLÊME.

642. *Déterminer le nombre des ſolives & des parties de ſolive, contenues dans une piece de bois équarrée.*

SOLUTION.

1°. Les dimenſions de cette piece de bois étant me-

ſurées en toiſes ou parties de toiſes, on fera d'abord le produit de deux de ces dimenſions, comme on l'a enſeigné dans le toiſé des ſurfaces, puis on multipliera le produit par la troiſieme dimenſion, comme on l'a enſeigné dans le toiſé des ſolides.

2°. Comme le produit que l'on aura formé ſera un nombre de toiſes cubes ou de parties de toiſe cube, c'eſt-à-dire, des pieds de toiſé cube, pouces de toiſe cube, &c. & que la toiſe cube vaut 72 ſolives, & que les pieds, pouces & lignes de toiſe cube, valent de même 72 pieds, pouces, lignes, &c. de ſolive, on multipliera par 72 toutes les parties du ſolide que l'on aura formé, & l'on aura la piece de bois évaluée en ſolives, & en parties de ſolive.

EXEMPLE.

643. *Déterminer le nombre des ſolives & des parties de ſolive d'une piece de bois équarrée de* $6^{T}\ 3^{P}\ 9^{p}$ *de long ſur* $2^{P}\ 8^{p}$ *de largeur, &* $2^{P}\ 6^{p}$ *d'épaiſſeur.*

OPÉRATION.

Longueur de la piece de bois	6^{T}	3^{P}	9^{p}
Largeur	0	2	8
Epaiſſeur	0	2	6
Multiplication des deux premieres dimenſions	6^{T}	3^{P}	9^{p}
	0	2	8
	2^{TT}	1^{TP}	3^{Tp}
		4	5
Multiplication du produit des deux premieres dimenſions par la troiſieme	2^{TT}	5^{TP}	8^{Tp}
		2	6
	5^{TTP}	10^{TTp}	8^{TTL}.
	1	5	8

Valeur de la piece de bois en toiſes $1^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}\ 4^{TTL}$
cubes & en parties de toiſes cubes 72

Réduction en ſolives & en pieds, 72 ſol. 0^{P} de ſol.
pouces & lignes de ſolive . . . 12 . . 0
4 . . 2

Valeur cherchée . . . . 88 ſol. 2^{P} de ſol.

Ayant diſpoſé les dimenſions de la piece de bois comme on le voit,

1°. On multipliera la longueur . . . $6^{T}\ 3^{P}\ 9^{p}$,
par la largeur . . . . . $2^{P}\ 8^{p}$.
Ce qui donnera . . . . . $2^{TT}\ 5^{TP}\ 8^{Tp}$.
2°. On multipliera le produit . . . $2^{TT}\ 5^{TP}\ 8^{Tp}$,
par l'épaiſſeur . . . . . $2^{P}\ 6^{p}$.
Ce qui donnera le ſolide $1^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}\ 4^{TTL}$.
3°. On multipliera le ſolide $1^{TTT}\ 1^{TTP}\ 4^{TTp}\ 4^{TTL}$,
par 72

Et l'on aura pour 1^{TTT} multipliée par 72, 72 ſolives que l'on écrira au-deſſous des ^{TTT}.

Comme 1^{TTP} eſt le ſixieme de 1^{TTP} qui a produit 72 ſolives, on aura pour 1^{TTP} le ſixieme de 72 ſolives; c'eſt-à-dire, 12 ſolives que l'on écrira ſur les 72 ſolives.

Comme 4^{TTp} eſt le tiers de 1^{TTP} qui a produit 12 ſolives, on aura pour 4^{TTp} le tiers de 12 ſolives; c'eſt-à-dire, 4 ſolives que l'on écrira ſous les 12 ſolives.

Comme 4^{TTL} eſt le douzieme de 4^{TTp} qui ont produit 4 ſolives, on aura pour 4^{TTL} le douzieme de 4 ſolives, ou de 24 pieds de ſolive; c'eſt-à-dire, 2 pieds de ſolive que l'on décrira à la droite des ſolives.

4°. On ajoutera tous ces produits particuliers, & l'on aura 88 ſolives, 2 pieds de ſolive, pour la valeur de la piece de bois.

REMARQUE.

644. Ordinairement on ſe contente dans le toiſé des bois, de meſurer en toiſes, pieds & pouces, la longueur de la piece de bois, & les deux autres dimenſions; ſavoir, la largeur & l'épaiſſeur ſeulement en pouces.

Puis l'on multiplie les pouces de l'une de ces deux dimenſions par 12, en convertiſſant les pouces en pieds; & les pouces de l'autre dimenſion par 6, en les convertiſſant en demi-pieds.

Enfin ayant réduit ces pieds & demi-pieds en toiſes, on multiplie enſemble ces deux nouvelles dimenſions, & la longueur de la piece, en quel ordre l'on veut.

Comme le produit qui réſulte de cette opération eſt le produit des vraies dimenſions de la piece, multiplié par 72, puiſque l'une des deux dimenſions a été multipliée par 12, & l'autre par 6, il eſt évident que ce produit exprime le nombre des ſolives & des parties de ſolive que cette piece renferme.

645. On appliquera cette méthode à l'exemple ci-deſſus, dans lequel on propoſoit une piece de bois

longue de . . . . . $6^T\ 3^P\ 9^p$.
large de . . . . . $2^P\ 8^p$ ou de 32^p.
épaiſſe de . . . . . $2^P\ 6^p$ ou de 30^p.

OPÉRATIONS.

Produit de la largeur multipliée par 12,	5^{T}	2^{P}.
Produit de l'épaiſſeur multipliée par 6,	2	3
Multiplication de ces deux nouvelles dimenſions	10^{TT} 2	4^{TP} 4
Multiplication du produit des deux nouvelles dimenſions par la longueur . . .	13^{TT} 6^{T}	2^{TP} 3^{P} 9^{p}.
	80	0
	6	4
	1	4
Valeur cherchée.	88 ſols	2^{P} de ſol.

1°. L'on convertira les 32 pouces de largeur en pieds, en les multipliant par 12; ce qui donnera 5^{T} 2^{P}.

L'on convertira les 30 pouces d'épaiſſeur en demi-pieds, en les multipliant par 6; ce qui donnera 15^{P} qui valent 2^{T} 3^{P}.

2°. Les dimenſions de la groſſeur étant ainſi préparées, on les multipliera enſemble; ce qui produira 13^{TT} 2^{TP}.

3°. On multipliera ce produit 13^{TT} 2^{TP} par la longueur 6^{T} 3^{P} 9^{p}; ce qui produira 88^{TTT} 2^{TTP} que l'on conſidérera comme des ſolives & pieds de ſolive, enſorte que la piece de bois propoſée contiendra 88 ſolives 2 pieds de ſolive.

Ce que l'on avoit déja trouvé par la méthode précédente.

SECTION III.

Changement des Solides ; & leur addition ; Multiplication & diviſion des Solides ſemblables.

PROBLÊME I.

546. *FAIRE un parallélepipede rectangle égal en ſolidité à un parallélepipede rectangle* ABCDEFGH, *& dont la hauteur ſoit égale à une ligne* M *donnée.* Fig. 311, 319.

SOLUTION.

Deux priſmes quelconques ſont entr'eux comme les produits de leurs baſes & de leurs hauteurs (n°. 612), & par conſéquent deux parallélepipedes ſont égaux lorſque la hauteur & la baſe de l'un ſont réciproques à la hauteur & à la baſe de l'autre (n°. 252).

Et ſi l'on ſuppoſe aux baſes des deux parallélepipedes une dimenſion, par exemple, la longueur égale, les parallélepipedes ſeront évidemment égaux ſi leurs hauteurs ſont réciproques à leurs largeurs ou aux dimenſions inégales de leurs baſes.

Donc pour avoir un parallélepipede rectangle égal à un parallélepipede rectangle donné ABCD, EFGH, & dont la hauteur ſoit égale à la ligne donnée M.

L'on fera un rectangle MNOP, dont une dimenſion, par exemple la longueur NO, ſoit égale à la longueur BC du rectangle ABCD, qui ſert de baſe au parallélepipede donné, & dont la largeur MN ſoit la quatrieme proportionnelle à la hauteur donnée M, à la hauteur BF du parallélepipede donné, & à ſa largeur AB.

Enſuite on conſtruira ſur le rectangle MNOP,

Le ſolide du parallélepipede eſt égal au proc
ſa baſe par ſa hauteur (n°. 530) : par conſéq
ſomme de pluſieurs parallélepipedes de même h
eſt égale au produit de cette hauteur par la
des baſes de ces parallélepipedes, ou à un para
pede qui auroit pour hauteur la même hauteur
parallélepipedes, & pour baſe la ſomme de
baſes.

Donc pour avoir un parallélepipede égal à l
me de pluſieurs parallélepipedes donnés, on
d'abord (n°. 646) tous ces parallélepipedes à u
me hauteur.

Enſuite, ayant fait un rectangle ou un pa
gramme égal à la ſomme des baſes de ces pa
pipedes réduits à la même hauteur, on conſtru
cette baſe un parallélepipede dont la hauteur ſo
à leur hauteur commune.

PROBLÊME III.

648. *Faire un parallélepipede égal en ſolidi
priſme poligone quelconque, ou à un cylindre, o
pyramide, ou à un cône, ou à une ſphere.*

SOLUTION

Donc pour avoir un parallélepipede égal en ſolidité à un priſme poligone quelconque, ou à un cylindre qui n'eſt qu'un priſme dont la baſe a une infinité de côtés, on fera un rectangle ou un parallélogramme égal à la baſe de ce priſme, ou de ce cylindre; & ſur ce rectangle ou ce parallélogramme, on fera un parallélepipede de même hauteur que ce priſme ou ce cylindre.

2°. Le ſolide d'une pyramide eſt égal au ſolide d'un priſme de même baſe, mais dont la hauteur n'eſt que le tiers de celle de la pyramide (n°. 572).

Mais le ſolide de ce priſme eſt égal au ſolide d'un parallélepipede de même hauteur, dont la baſe eſt un rectangle ou un parallélogramme égal à la baſe de ce priſme (n°. 529).

Donc pour avoir un parallélepipede dont le ſolide ſoit égal au ſolide d'une pyramide, on fera d'abord un rectangle ou un parallélogramme égal à la baſe de cette pyramide.

Enſuite on conſtruira ſur ce rectangle ou ce parallélogramme un parallélepipede dont la hauteur ne ſoit que le tiers de celle de la pyramide.

On aura de même un parallélepipede égal en ſolidité à un cône, ſi ayant fait un rectangle ou un parallélogramme dont l'une des dimenſions ſoit le rayon, & l'autre une droite égale à la moitié de la circonférence de la baſe de ce cône, on conſtruit ſur ce rectangle ou ſur ce parallélogramme un parallélepipede dont la hauteur ſoit égale au tiers de la hauteur du cône (n°. 573).

3°. Le ſolide d'une ſphere eſt égal au produit de la multiplication d'un cercle de même diametre qu'elle, par les deux tiers de ſon diametre (n°. 599).

Donc on aura un parallélepipede dont le ſolide ſera égal au ſolide d'une ſphere, ſi ayant fait un rectangle

ou un parallélogramme dont l'une des deux dimenſions ſoit le rayon de la ſphere, & l'autre une droite égale à la moitié de la circonférence décrite de l'intervalle de ce rayon, on conſtruit ſur ce rectangle ou ſur ce parallélogramme un parallélepipede dont la hauteur ſoit égale aux deux tiers du diametre de cette circonférence, ou du diametre de la ſphere.

PROBLÊME IV.

649. *Faire un parallélepipede égal à la ſomme de tant de priſmes ou de cylindres, ou de pyramides, ou de cônes, ou de ſpheres que l'on voudra.*

SOLUTION.

On changera d'abord (n°. 648) tous ces ſolides propoſés en autant de parallélepipedes; enſuite on fera (n°. 647) un parallélepipede égal à la ſomme de tous ces parallélepipedes.

PROBLÊME V.

320. 650. *Faire un cube égal en ſolidité à un parallélepipede donné* ABCDEFGH.

SOLUTION.

Suppoſons que la baſe ABCD du parallélepipede ABCDEFGH donné eſt un quarré, & que l'on a pris deux moyennes proportionnelles AX, AY entre le côté AB de ce quarré, & la hauteur AE de ce parallélepipede.

Deſorte que l'on ait $\because$ AB : AX : AY : AE.

Parce que ces quatre termes ſont en progreſſion géométrique, on aura (n°. 619) $\overline{AB}^3 : \overline{AX}^3 :: AB : AE$.

En faiſant le produit des extrêmes & celui des moyens, il viendra (n°. 252) $\overline{AB}^3 \times AE = \overline{AX}^3 \times AB$.

Et enfin en diviſant les deux membres de cette égalité par AB, on aura (*axiome* 11) $\overline{AB}^2 \times AE = \overline{AX}^3$.

Mais le produit $\overline{AB}^2 \times AE$, c'eſt le produit de la baſe du parallélepipede donné, multiplié par la hauteur de ce parallélepipede, & par conſéquent c'eſt le ſolide de ce parallélepipede (n°. 530).

$\overline{AX}^3$, c'eſt le cube fait ſur la premiere des deux moyennes proportionnelles entre le côté AB du quarré ABCD, qui ſert de baſe au parallélepipede, & la hauteur AE de ce parallélepipede.

Donc en général pour avoir un cube égal à un parallélepipede donné,

1°. On changera la baſe de ce parallélepipede en quarré.

2°. On prendra deux moyennes proportionnelles entre le côté de ce quarré, & la hauteur du parallélepipede donné; & la premiere de ces deux moyennes proportionnelles ſera le côté du cube égal au parallélepipede donné.

REMARQUE.

651. L'on n'eſt pas parvenu à déterminer entre deux lignes deux moyennes proportionnelles géométriques par le moyen de la Géométrie élémentaire; c'eſt-à-dire, par les propriétés de la ligne droite, & celle du cercle: on donnera dans la Géométrie compoſée la ſolution de ce problême.

PROBLÊME VI.

652. *Faire un cube égal en ſolidité à un priſme polygone quelconque, ou à un cylindre, ou à une pyramide, ou à un cône, ou à une ſphere.*

SOLUTION.

On changera (n°. 648) chacun de ces différens

cônes, ou de ſpheres que l'on voudra.

SOLUTION.

On fera (n°. 649) un parallélepipede ég
ſomme de tous ces corps ; enſuite on chan
parallélepipede en cube (n°. 650).

PROBLÊME VIII.

Fig. 321. 654. *Faire un cube qui ſoit un multiple ou u*
multiple d'un cube ABCDEFGH *donné,*
dire, qui contienne ce cube donné, ou qui y ſ
tenu un certain nombre de fois.

SOLUTION.

Lorſque quatre lignes ſont en progreſſion
trique, le cube de la premiere eſt au cube de
conde, comme la premiere eſt à la quatrieme
Donc, 1°. ſi on veut un cube qui contienne
ABCDEFGH donné un certain nombre d
on déterminera une droite AM qui contienne
me nombre de fois le côté AB du cube donn
on prendra deux moyennes proportionnelles A

nombre de fois proposé; donc le cube $\overline{AX}^3$ contient aussi le cube $\overline{AB}^3$, ou le cube ABCDEFGH nombre de fois demandé.

2°. Si on veut un cube qui soit contenu un certain nombre de fois dans le cube donné ABCDEFGH :

On déterminera une ligne AM qui soit contenue le même nombre de fois dans le côté AB du cube donné, puis on prendra deux moyennes proportionnelles entre ce côté AB & la droite AM, la premiere de ces deux moyennes sera le côté du cube cherché.

PROBLÊME IX.

655. *Un prisme ou une pyramide, ou un cylindre, ou un cône étant donné, faire un solide semblable, & qui en soit un multiple ou un sous-multiple.*

SOLUTION.

1°. Soient nommées A, B, C, D les côtés du prisme donné; a, b, c, d les côtés du prisme que l'on demande. Puisque ces deux prismes doivent être semblables, tous les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre (n°. 604); c'est-à-dire, que l'on aura $A : a :: B : b :: C : c :: D : d$, &c.

D'où l'on conclurra que si on parvient à déterminer l'un des côtés quelconques a du prisme à construire, les autres b, c, d, &c. pourront se déterminer par de simples proportions.

Par exemple, pour connoître le côté b, on fera cette proportion $A : a :: B : x$, ou côté cherché b.

Pour connoître le côté c, on fera $A : a :: C :$ côté cherché c, ainsi des autres.

me l'on a déterminé le côté d'un cube multi
ſous-multiple d'un cube donné (n°. 654).

2°. Parce que deux pyramides ſemblables
core leurs côtés homologues proportionnels (n
& que de plus elles ſont entr'elles comme l
de leurs côtés homologues (n°. 616), il eſt
que par la méthode que l'on vient de donn
trouver tous les côtés d'un priſme ſemblabl
ple ou ſous-multiple d'un priſme donné, on t
les côtés homologues d'une pyramide sembl
multiple ou ſous-multiple d'une pyramide don

3°. Les cylindres ſemblables étant entr'eux
les cubes des diametres de leurs baſes (n°. 6
leurs axes également inclinées ſur leurs baſes
proportionnelles aux diametres de ces baſes :

Il ſuit que pour faire un cylindre ſemblal
cylindre donné, & qui en ſoit un multiple ou
multiple, il faudra chercher par le problèm
(n°. 654) une droite dont le cube ſoit au
diametre de la baſe du cylindre propoſé, dan
port du cylindre à conſtruire avec le cylindre
cette droite ſera le diametre de la baſe du cyl
conſtruire.

dre, en lui faiſant faire un angle égal à celui que fait l'axe du cylindre donné ſur ſa baſe.

4°. Les cônes ſemblables étant auſſi entr'eux comme les cubes des diametres de leurs baſes (n°. 617), & leurs axes également inclinés ſur leurs baſes, étant proportionnels aux diametres de ces baſes:

Il ſuit que la méthode que l'on vient de donner pour faire un cylindre ſemblable à un cylindre donné, & qui en ſoit un multiple ou un ſous-multiple, s'étend auſſi aux cônes ſemblables.

CHAPITRE TREIZIEME.

Application de l'Algebre à la réſolution de quelques problêmes de la Géométrie élémentaire.

656. LES problêmes de la Géométrie élémentaire, c'eſt-à-dire, ces problêmes que l'on peut conſtruire en employant ſeulement la ligne droite & le cercle, ne ſont pas tous ſuſceptibles d'une réſolution analytique. Cette méthode ſuppoſe les propriétés des perpendiculaires, des paralleles, des angles : en général tout ce qui eſt relatif aux raiſons & aux proportions : elle ſuppoſe même le principe de toutes les proportions des lignes & des figures, ſavoir, que dans les triangles ſemblables les côtés homologues ſont proportionnels.

657. Voici en général en quoi conſiſte l'art de réſoudre un problême de Géométrie par le moyen de l'Algebre.

1°. On déſigne les lignes & les figures, en général les quantités géométriques, par des lettres, ce qui eſt connu par les premieres, ce qui eſt inconnu par les dernieres; & l'on exprime par les calculs algébriques les rapports ſimples & compoſés que peuvent avoir ces quantités géométriques.

2°. On met le problême en équation, & l'on réſoud ces équations.

3°. On repréſente, par la Géométrie, la réſolution analytique; c'eſt-à-dire, qu'on trace les lignes & les figures qui ont entr'elles les rapports exprimés par les équations qui renferment la ſolution : c'eſt ce que l'on

nme la *conſtruction* des équations. On expliquera différens articles dans la ſection ſuivante, & les hodes que l'on y donnera ſeront appliquées dans ſeconde ſection à la réſolution de quelques prones déterminés de premier & de ſecond degré.

SECTION PREMIERE.

ARTICLE PREMIER.

niere d'exprimer par des caracteres & par des calculs lgébriques les quantités géométriques, leurs rapports & leurs propriétés, &c.

8. CET objet eſt ſans aucune difficulté : les lignes férentes, les côtés différens des figures ſeront exmés par différentes lettres a, b, c, d, &c.
Les lignes égales ſeront exprimées par les mêmes tres; ſi une ligne eſt, par exemple, double, triple, . d'une autre déſignée par a, elle ſera exprimée r $2a$, $3a$, &c. & ſi elle en eſt la moitié, le tiers, quart, &c. elle ſera exprimée par $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{1}{4}a$, &c.
Un triangle dont la baſe ſera déſignée par a, & la uteur par b, ſera exprimée par $\frac{ab}{2}$ (n°. 216).
Un parallélogramme dont la baſe & la hauteur ſent déſignées l'une par a, l'autre par b, ſera exprimé r ab (n°. 213).
a^2 exprimera (n°. 205) un quarré qui a pour côtés e droite déſignée par a; a^3 exprimera un ſolide nt les trois dimenſions ſont égales & déſignées chane par a.
abc déſignera un parallélepipede dont les trois dienſions ſeront exprimées par les lettres a, b, c, &c. °. 532).

ARTICLE II.

Maniere de réſoudre algébriquement les probl
Géometrie.

659. La réſolution analytique des problê
Géométrie étant différente pour les différens
mes que l'on peut propoſer, on ne peut guer
fermer dans un nombre fixe de regles : voici
néral la maniere de s'y conduire.

Il faut d'abord bien examiner l'état de la q
remarquer les qualités des lignes connues &
nues qui entrent dans le problême, tracer ce
l'on juge néceſſaires ; & ſans faire de diſtinctie
les connues & les inconnues, obſerver leur
les unes à l'égard des autres : les propriétés de
métrie élémentaire, principalement celles de
gles rectangles, & celles des triangles ſembla
ront connoître leurs rapports.

Enſuite ayant exprimé algébriquement les q
géométriques, les connues par les premieres l
l'alphabet, & les inconnues par les dernieres
les rapports qu'elles auront entr'elles, on m
problême en équations en conſéquence de ces r

qu'une inconnue, il ſera déterminé; c'eſt-à-dire, qu'il n'aura qu'une ſolution, ou qu'un certain nombre de ſolutions.

Si le problême donne une équation où il y ait pluſieurs inconnues, il faudra faire de façon, par le moyen des différentes conditions du problême, que l'on trouve autant d'équations qu'il y aura d'inconnues. Si l'on y réuſſit, on parviendra toujours à dégager chacune de ces inconnues, & le problême ſera encore déterminé.

Si l'on ne peut trouver autant d'équations qu'il y aura d'inconnues, deſorte qu'il reſte au moins deux inconnues dans la derniere équation, le problême ſera indéterminé; c'eſt-à-dire, qu'il aura une infinité de ſolutions.

On ne parlera dans ce livre que des problêmes déterminés, & ſeulement de ceux du premier & du ſecond degré.

ARTICLE III.

Où l'on enſeigne à exprimer géométriquement les quantités algébriques.

660. On peut exprimer géométriquement toutes les quantités algébriques par le moyen des opérations géométriques par leſquelles on trouve une quatrieme ou troiſieme proportionnelle à des droites données.

Ou une moyenne proportionnelle entre deux droites données.

Ou le côté d'un quarré égal à la ſomme de tant de quarrés que l'on voudra.

Ou le côté d'un quarré égal à la différence de deux quarrés donnés.

661. 1°. *Soit à exprimer géométriquement la valeur de x dans l'équation* . . . . . $x = \frac{bc}{a}$.

En multipliant chaque nombre par a, il vient $ax = bc$, d'où l'on déduit . . . . . $a : b :: c : x$.

Ce qui montre qu'on aura la valeur géométrique d'x, en prenant (n°. 349) une quatrieme proportionnelle aux droites repréſentées par a, b, c.

De l'équation . . . . . $x = \frac{a^2}{c}$

on déduit . . . . . $c : a :: a : x$.

La valeur géométrique d'x eſt donc une troiſieme proportionnelle aux droites déſignées par c, a (n°. 350).

De l'équation . . . . . $x = \frac{a^2 + ab}{c + d}$

on déduit . . . . . $c + d : a + b :: a : x$.

La valeur géométrique d'x eſt donc une quatrieme proportionnelle (n°. 349) aux droites déſignées, la premiere par $c + d$, la ſeconde par $a + b$, la troiſieme par a.

De l'équation . . . . . $x = \frac{a^2 - ab}{c}$

on tire . . . . . $c : a - b :: a : x$,

où l'on voit que la valeur géométrique d'x eſt une quatrieme proportionnelle aux droites déſignées, la premiere par c, la ſeconde par $a - b$, la troiſieme par a.

662. 2°. *Soit à exprimer géométriquement la valeur d'*x *dans l'équation* . . . . . $x = \sqrt{ab}$.

En élevant chaque membre au quarré, on a $x^2 = ab$, d'où l'on tire . . . . . $\therefore a : x : b$.

Ce qui montre que la valeur géométrique d'x, eſt une droite moyenne proportionnelle géométrique entre les droites déſignées, l'une par a, l'autre par b (n°. 373).

L'équation . . . . . $x = \sqrt{a^2 + ab}$

vient de . . . . . $x^2 = a^2 + ab$,

d'où l'on tire . . . . . $\div\div a+b : x : a$,

où l'on voit que la valeur géométrique d'x eſt une moyenne proportionnelle géométrique entre deux droites déſignées, l'une par $a+b$, l'autre par a (n°. 373).

L'équation . . . . . $x = \sqrt{a^2 - b^2}$

donne . . . . . $\div\div a+b : x : a-b$.

La valeur géométrique d'x eſt donc une moyenne proportionnelle géométrique entre deux droites déſignées, l'une par $a+b$, l'autre par $a-b$ (n°. 373).

663. 3°. *Soit à exprimer géométriquement la valeur d'*x *dans l'équation* . . . . $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

En élevant chaque membre au quarré, on a $x^2 = a^2 + b^2$, où l'on voit le quarré d'x égal à la ſomme de deux quarrés.

On aura donc la valeur géométrique d'x en cherchant (n°. 470) le côté du quarré égal à la ſomme des quarrés qui ont pour côtés, l'un la droite déſignée par a, l'autre la droite déſignée par b.

Il ſera auſſi aiſé de déterminer la valeur géométrique d'x dans l'équation $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

On aura la valeur géométrique d'x dans l'équation . . . . . $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, en cherchant (n°. 471) le côté du quarré égal à la différence des quarrés a^2, b^2.

664. 4°. *Quelquefois il faut répéter la même opération géométrique pour exprimer géométriquement une quantité algébrique.*

*Soit à exprimer géométriquement la valeur d'*x *dans l'équation* . . . . . $x = \frac{afb}{cd}$.

Comme cette équation peut ſe réduire à $x = \frac{af}{c} \times \frac{b}{d}$, on cherchera d'abord (n°. 661) la valeur géométri-

que de $\frac{af}{c}$ en la nommant P. L'équation propoſée deviendra . . . . . $x = \frac{Pb}{d}$.

On cherchera enſuite la valeur géométrique d'x dans l'équation $x = \frac{Pb}{d}$ (n°. 661), & l'on aura la valeur d'x dans la propoſée.

De même ſi l'on a . . . . . $x = \frac{a^2b - bcf}{ad}$, on commencera par déterminer la valeur géométrique de la fraction $\frac{a^2b}{ad}$, ou, ce qui eſt la même choſe, de $\frac{ab}{d}$ (n°. 661).

Je ſuppoſe cette valeur déſignée par m.

On cherchera enſuite, comme on l'a fait dans l'exemple précédent, la valeur géométrique de $\frac{bcf}{ad} = \frac{bc}{a} \times \frac{f}{d}$.

Je ſuppoſe cette ſeconde valeur déſignée par n.

On aura $m - n$ pour la valeur géométrique d'x dans la propoſée.

665. *On pourra, par la même méthode, trouver une ligne égale à la ſomme de tant de fractions que l'on voudra.*

666. 5°. *Quelquefois il faut employer pluſieurs des opérations géométriques dont on a parlé.*

Par exemple, étant donné l'équation $x = \frac{p}{q}\sqrt{a^2 - b^2}$, on cherchera d'abord la valeur géométrique de $\sqrt{a^2 - b^2}$ (n°. 663).

En la nommant c, l'équation propoſée deviendra . . . . . $x = \frac{Pc}{q}$.

On cherchera enſuite (n°. 661) la valeur géomé

ue de $\frac{Pc}{q}$, laquelle ſera la valeur d'x dans la pro-
ée.

67. 6°. *Quelquefois on fait certains changemens aux ntités algébriques, pour en trouver la valeur géomé-ue; ces changemens conſiſtent principalement à met-l'expreſſion algébrique d'un quarré à la place de l'ex-ſion algébrique d'un rectangle, ou à mettre l'expreſ-: algébrique d'un rectangle dont un côté ſoit donné à lace d'un autre rectangle ou d'un quarré.*

ar exemple, *étant donné l'équation* $x = \sqrt{a^2 + bc}$, pourra changer le rectangle bc en un quarré (n°.), en prenant une droite m moyenne proportion-le entre les droites b, c; ce qui donnera $m^2 = bc$, en ſubſtituant m^2 à la place de bc, la propoſée de-ndra . . . . . $x = \sqrt{a^2 + m^2}$, ur on cherchera l'expreſſion géométrique comme a fait ci-deſſus (n°. 663).

Dans la même équation . . . $x = \sqrt{a^2 + bc}$, pourra changer le quarré a^2 en un rectangle dont des côtés ſoit b ou c. Suppoſons que ce côté ſoit en nommant y le ſecond côté, on aura $by = a^2$, ar conſéquent $y = \frac{a^2}{b}$, & en prenant la valeur métrique d'y (n°. 661), & la nommant f, la pro-ée deviendra . . . . . $x = \sqrt{bf + bc}$, à l'on déduit . . . . . $\therefore f + c : x : b$.

Dans la même équation . . . $x = \sqrt{a^2 + bc}$, pourra changer le rectangle bc en un autre dont des côtés ſoit le côté a du quarré a^2; ce que l'on ſcutera en prenant (n°. 349) une quatrieme pro-ortionnelle au côté a du quarré, & aux produiſans du rectangle bc.

668. *Cette derniere conſtruction montre que l'on trouver un rectangle dont l'un a des côtés eſt do égal à tant de rectangles algébriques que l'on voud*

Etant donnés, par exemple, les rectangles bc, fd je diviſe chaque rectangle par le côté donné a; c donne . . . . . $\frac{bc}{a} + \frac{fd}{a} +$

Je cherche (n°. 661) les valeurs géométriques d fractions, pour avoir une droite $x = \frac{bc}{a} + \frac{fd}{a} +$

Le rectangle qui aura pour l'un de ſes côtés la née a, & pour l'autre la valeur géométrique d'x, égal à la ſomme des rectangles algébriques propc

Car ſi dans l'équation . . . $x = \frac{bc}{a} + \frac{df}{a} +$ on multiplie chaque membre par a, on aura . . . . . $ax = bc + df +$

669. Et comme ce rectangle ax pourra ſe cha en quarré (n°. 667), *on pourra toujours trouve quarré égal à la ſomme de tant de rectangles algébr* ***que l'on voudra.***

ARTICLE IV.

Conſtruction des équations déterminées du premier ſecond degré.

670. On a déja dit (n°. 657) que la conſtru des équations conſiſte à exprimer géométriquem valeur de l'inconnue dans l'équation qu'aura do réſolution analytique du problême.

Si l'équation déterminée du problême eſt d mier degré, ou une équation du ſecond degré c pas de ſecond terme, la valeur de l'inconnue ſe truira toujours par quelques-unes des opératior métriques dont on a parlé dans l'article précéd

onſtruire les équations du ſecond degré qui
econd terme.

ion des équations déterminées du ſecond degré, qui ont un ſecond terme.

Quelque compoſée que puiſſe être une équation l degré qui a un ſecond terme, comme on pourra trouver une droite a égale à toutes les quantités , qui multiplient l'inconnue x dans le ſecond ter- n quarré b^2 (n°. 667) *égal à tous les rectan- rément connus, cette équation pourra ſe ré- uelqu'une des formules ſuivantes.*

1°. $x^2 - ax - b^2 = 0$
2°. $x^2 + ax - b^2 = 0$
3°. $x^2 - ax + b^2 = 0$
4°. $x^2 + ax + b^2 = 0$,

Dont les racines ſont :

1°. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
2°. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$
3°. $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$
4°. $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

racines de la 1re *formule* $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$,
ır la droite indéfinie FP, pris le point A pour *Fig.* 322.
ıencement d'x que l'on ſuppoſera poſitive en
A du côté de P: ſoit élevée au point A la
culaire AD $= b$, côté du quarré b^2; ſoit priſe
AC $= \frac{1}{2}a$, & du côté de P par rapport à
e que $\frac{1}{2}a$ a le ſigne +; ſoit enfin du centre
le rayon CD, décrit le demi-cercle EDB qui
P en E & en B.
era la valeur poſitive d'x, c'eſt-à-dire, la va-

leur d'x dans l'équation $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{a$

Car AB $\begin{cases} = AC + BC = AC + \sqrt{\overline{AC$ \\ = AC + CD = $\frac{1}{2}a + \sqrt{a^2$ \end{cases}

AE ſera la valeur négative d'x, c'eſt-à-dir

leur d'x dans l'équation . . $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{$

Car AE = EC — AC, & parce que cet

AE eſt priſe de l'autre côté de A par rappo

en la prenant négativement on aura :

$-AE = AC - EC = AC - DC = \begin{cases} AC - \sqrt{\overline{AC$ \\ $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2$ \end{cases}

313. *Pour les racines de la 2e formule* $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{$

Soit ſur la droite indéfinie FP pris le point

le commencement d'x que l'on ſuppoſera poſ

allant de A du côté P ; ſoit élevée au point A

pendiculaire AD = b, côté du quarré b^2 ; ſo

la partie AC = $\frac{1}{2}a$, de l'autre côté de A à l'é

P, parce que l'on a $-\frac{1}{2}a$; ſoit enfin du ce

& par le point D décrit le demi-cercle EDB qu

FP en E & en B.

AB ſera la valeur poſitive d'x, c'eſt-à-dire

leur d'x dans l'équation $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a$

Car AB = CB — CA = CD — C

$= \begin{cases} -CA + \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2} \\ -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \end{cases}$ (n°. 365).

AE ſera la valeur négative d'x, c'eſt-à-dire,

leur d'x dans l'équation $x = -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2$

Car la partie AE = AC + CE, & en la p

négativement, parce qu'elle eſt de l'autre côté

l'égard de P, on aura :

$-AE = -AC - CE = -AC - C$

$= \begin{cases} -AC - \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2} \\ -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \end{cases}$ (n°. 565).

ur les racines de la 3e formule $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. *Fig.* 324.

Soit ſur la droite indéfinie EP pris le point A pour commencement d'x ; ſoit priſe du côté de P, par port à A, la partie $AC = \frac{1}{2}a$; ſoit du centre C c le rayon AC, décrit le demi-cercle AHG, & éle- dans ce demi-cercle le rayon CH perpendiculaire diametre AG ; enfin ayant pris ſur CH la partie $D = b$, côté du quarré b^2, & ayant mené par le int D la droite IL parallele au diametre AG, & i coupe la demi-circonférence aux points I & L, ant de ces points I, L abaiſſées les ordonnées IE, B, les ſegmens AB, AE ſeront les deux valeurs po- ves d'x dans cette troiſieme formule.

C'eſt-à-dire, que AB ſera la valeur d'x dans l'équa-

n . . . . . $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Car $AB = AC + CB = AC + \sqrt{\overline{CL}^2 - \overline{BL}^2} =$

$\begin{cases} AC + \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} \\ \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}. \end{cases}$

AE ſera la valeur d'x dans $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$.

Car $AE = AC - EC = AC - \sqrt{\overline{CI}^2 - \overline{EI}^2} =$

$\begin{cases} AC - \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2} \\ \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}. \end{cases}$

r les racines de la 4e formule $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. *Fig.* 325.

Soit ſur la droite indéfinie FP pris le point A pour commencement d'x qui ſeroit poſitive en allant P ; ſoit priſe la partie $AC = \frac{1}{2}a$ de l'autre côté A, à l'égard de P, parce que l'on a $-\frac{1}{2}a$ dans les ne de cette quatrieme formule ; ſoit du centre C le rayon CA, décrit le demi-cercle AHG, ache- la conſtruction comme dans la *figure* 324, pour oiſieme formule, les ſegmens AE, AB ſeront les valeurs négatives d'x dans la quatrieme formule.

PROBLÈME II.

Le contour AB + BC + AC, *& la ſurface* *Fig.* 327.
ngle rectangle étant donnés ; trouver ſon hypo-
AC, *la perpendiculaire* BP *abaiſſée du ſommet*
'a droit ſur l'hypothénuſe, & conſtruire ce trian-

SOLUTION.

rface du triangle étant exprimée par b^2, ſon
AB + BC + AC par a, l'hypothénuſe AC
a ſomme AB + BC des côtés de l'angle droit
ar $a - x$.
our déterminer l'hypothénuſe AC, on remar-
e (n°. 304) . . . $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.
nme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB + BC}^2 - 2AB \times BC$
),
l'équation $\overline{AC}^2 = \overline{AB + BC}^2 - 2AB \times BC$.
bſtituera dans cette équation les valeurs algé-
, à ſavoir, x^2 à la place de $\overline{AC}^2$, le quarré de
la place de $\overline{AB + BC}^2$; enfin $4b^2$ à la place
$\times$ BC : car le produit AB $\times$ BC des côtés de
roit étant $= 2b^2$ (n°. 216), c'eſt-à-dire,
le la ſurface du triangle, 2AB $\times$ BC en eſt
e, c'eſt-à-dire, $= 4b^2$.
i donnera $x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$.
l'on tire en tranſpoſant & en réduiſant
. . . . . $2ax = a^2 - 4b^2$.
diviſant . . . $x = \frac{a^2 - 4b^2}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}$.
ur déterminer la perpendiculaire BP, on re-
e que la moitié du produit BP $\times$ AC de
pendiculaire par l'hypothénuſe, eſt égale (n°.
a ſurface du triangle que l'on a ſuppoſé $= b^2$.

SECTION II.

Où l'on applique la ſection précédente à la ſolu quelques problêmes déterminés du premier & cond degré.

ARTICLE I.

Problêmes déterminés du premier degré.

PROBLÊME I.

g. 326. 675. UNE *droite* AC *étant diviſée en* B, *la en un autre point* D, *de façon que le ſegment* D *moyen proportionnel géométrique entre le ſegme & le ſegment* BD, *compris entre les points de di* c'eſt-à-dire, que l'on ait ∴ AD : DC

SOLUTION.

AB étant déſigné par a, BC par b, BD AD ſera $a + x$, & CD ſera $b - x$.

Par conſéquent en exprimant algébriquement poſition . . . . . ∴ AD : DC

on aura . . . . . ∴ $a + x : b -$

Donc (n°. 252) $ax + x^2 = b^2 - 2bx$

En tranſpoſant & en réduiſant $ax + 2bx$

En diviſant . . . . . $x = \frac{}{a}$

D'où l'on tire . . . . $a + 2b : b :$

On cherchera donc (n°. 349) une troiſiem portionnelle aux deux droites déſignées, la pr par $a + 2b$, la ſeconde par b, on portera cet ième proportionnelle de B en D, & le problê réſolu.

PROBLÈME II.

676. *Le contour* AB + BC + AC, *& la ſurface d'un triangle rectangle étant donnés ; trouver ſon hypothénuſe* AC, *la perpendiculaire* BP *abaiſſée du ſommet de l'angle droit ſur l'hypothénuſe, & conſtruire ce triangle.* Fig. 327

SOLUTION.

La ſurface du triangle étant exprimée par b^2, ſon contour AB + BC + AC par a, l'hypothénuſe AC par x, la ſomme AB + BC des côtés de l'angle droit le ſera par $a - x$.

1°. Pour déterminer l'hypothénuſe AC, on remarquera que (n°. 304) . . . $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Et comme $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB + BC}^2 - 2AB \times BC$ (n°. 210),

on aura l'équation $\overline{AC}^2 = \overline{AB + BC}^2 - 2AB \times BC$.

On ſubſtituera dans cette équation les valeurs algébriques ; à ſavoir, x^2 à la place de $\overline{AC}^2$, le quarré de $a - x$ à la place de $\overline{AB + BC}^2$; enfin $4b^2$ à la place de $2AB \times BC$: car le produit $AB \times BC$ des côtés de l'angle droit étant $= 2b^2$ (n°. 216), c'eſt-à-dire, double de la ſurface du triangle, $2AB \times BC$ en eſt quadruple, c'eſt-à-dire, $= 4b^2$.

Ce qui donnera $x^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 4b^2$.

D'où l'on tire en tranſpoſant & en réduiſant

. . . . . $2ax = a^2 - 4b^2$.

Et en diviſant . . . $x = \frac{a^2 - 4b^2}{2a} = \frac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}$.

2°. Pour déterminer la perpendiculaire BP, on remarquera que la moitié du produit BP × AC de cette perpendiculaire par l'hypothénuſe, eſt égale (n°. 6) à la ſurface du triangle que l'on a ſuppoſé $= b^2$.

Donc en exprimant la perpendiculaire BP ch
par y, l'hypothénuſe AC que l'on vient de t
par d, on aura . . . . . $\frac{yd}{2}$ =

Et par conſéquent . . . . . $y = \frac{2b^2}{d}$ =

3°. Ayant ainſi trouvé les valeurs de l'hypot
AC, & de la perpendiculaire BP, voici com
pourra conſtruire le triangle.

Puiſque pour la valeur de l'hypothénuſe on a
$x = \frac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}$, ayant tiré une droite AD $= a$
à-dire, égale au contour du triangle, on élev
point A ſur AD une perpendiculaire AL $= 2b$,
à-dire, égale au double du côté b du quarré ég
ſurface du triangle, on portera ce même côté
en G ſur AD; enfin ayant joint les points L,
la droite LD, on menera à cette droite par le
G la parallele GH qui déterminera ſur AL la
AH, quatrieme proportionnelle à AD, AL, A
à a, $2b$, b, cette partie AH ſera donc la vale
$\frac{2b^2}{a}$.

Ayant partagé AD en deux également en M
portera AH de M en C, & l'on aura AC=AM-
$= AM - AH = \frac{1}{2}a - \frac{2b^2}{a}$.

Puiſque pour la perpendiculaire BP on a t

. . . . . $y =$

on coupera AC en deux également en O, o
tera b de A en N ſur AL, & de A en G ſur A
ſuite ayant joint les points O & N par la droite
on menera à cette droite par le point G la pa
GK qui déterminera ſur AL la partie AK, tro

proportionnelle aux droites AO $= \frac{1}{2}d$, & AN ou AG $= b$ (n°. 350); cette droite AK ſera donc $= \frac{b^2}{\frac{1}{2}d}$, & par conſéquent elle ſera la valeur de la perpendiculaire y.

Enfin ayant décrit ſur l'hypothénuſe AC, comme diametre, un demi-cercle ABC, on menera par le point K une parallele KB à l'hypothénuſe qui coupe la demi-circonférence; le point B d'interſection ſera le ſommet du triangle rectangle qu'il falloit conſtruire; enſorte que ſi de ce point B on mene aux extrêmités de l'hypothénuſe les cordes AB, BC, on aura le triangle ABC demandé.

PROBLÊME III.

677. Décrire un quarré DEFG *dans un triangle* ABC *donné.* Fig. 32

SOLUTION.

Il eſt évident que le triangle ABC étant donné, la perpendiculaire BH eſt auſſi donnée; il n'eſt pas moins clair que pour conſtruire le quarré demandé, il ſuffit de déterminer dans la hauteur BH un point P, tel qu'en menant par ce point EF parallele à AC, l'on ait EF = PH : car alors en menant ED, FG parallelement à PH, on aura EF = ED = FG; c'eſt-à-dire, que DEFG ſera un quarré.

Le problême étant ſuppoſé réſolu, & ayant déſigné la baſe AC par a, la hauteur BH par b, l'inconnue PH ou EF par x, BP = BH — HP ou EF par $b - x$, on remarquera que les triangles ſemblables (n°. 267) ABC, EBF donnent (n°. 292) AC : EF :: BH : BP.

Et en employant les expreſſions algébriques . . .

. . . . . $a : x :: b : b - x$.

Donc (n°. 252) $bx = ab - ax$, ou $bx + ax = ab$.

Et par conſéquent . . . . . $x = \frac{ab}{a+b}$.

Ce qui donne lieu à cette conſtruction.

On prendra ſur HC prolongée du côté C, la partie HM = AC = a, & enſuite MN = BH = b; ce qui donnera HN = $a+b$, ayant joint les points B & N par la droite BN, on menera à cette droite par le point M la parallele MP qui, coupant la hauteur BH, déterminera le point P demandé; c'eſt-à-dire, la grandeur de PH ou de EF. Car dans cette conſtruction (n°. 267) HN : BH :: HM : PH.

Et parce que HN = $a+b$, BH = b, HM = a, PH = x

. . . . . $\begin{cases} a+b : b :: a : x, \\ \& \ldots x = \frac{ab}{a+b}. \end{cases}$

Ce qu'il falloit trouver.

PROBLÊME IV.

Fig. 330. 678. *Ayant mené dans un demi-cercle* ABC *donné une ordonnée* BH, *& ſur l'une* HC *des abſciſſes comme diametre, ayant décrit un autre demi-cercle* HNC *endedans du premier, déterminer dans le triangle mixtiligne* BHNCE, *le centre* Q *d'un cercle dont la circonférence touche les trois côtés de ce triangle.*

SOLUTION.

En ſuppoſant le problême réſolu, ſoient menées du centre Q les droites, SQ parallele à HB, RQ parallele à HC, & aux points E, N d'attouchement les droites QE, QN qui, étant prolongées, paſſeront par les centres O, M des cercles donnés (n°. 110); ſoit exprimé OA = OC = OE par . . . a

MC = MH = MN par . . . b

OH par c

HB par . . . . . f

L'inconnue $RQ = HS = QN = QE$ par x

$OQ = OE - QE$ ſera . . . $a - x$

$MQ = MN + QN$ ſera . . . $b + x$

$MS = MH - HS$ ſera . . . $b - x$

$OS = OH + HS$ ſera . . . $c + x$.

Conſidérant à préſent ces droites dans les triangles rectangles OQS, SQM, on aura (n°. 305) . . .

. . . $\begin{cases} \text{dans le triangle OQS, } \overline{SQ}^2 = \overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2, \\ \text{dans le triangle SQM, } \overline{SQ}^2 = \overline{MQ}^2 - \overline{MS}^2. \end{cases}$

Donc . . . $\overline{OQ}^2 - \overline{OS}^2 = \overline{MQ}^2 - \overline{MS}^2$.

Et en ſubſtituant les valeurs algébriques $a^2 - 2ax + x^2 - c^2 - 2cx - x^2 = b^2 + 2bx + x^2 - b^2 + 2bx - x^2$.

En réduiſant $a^2 - c^2 - 2ax - 2cx = 4bx$.

En tranſpoſant $4bx + 2ax + 2cx = a^2 - c^2$.

Enfin en diviſant . . . $x = \frac{a^2 - c^2}{4b + 2a + 2c}$.

Et parce que $a^2 - c^2 = \overline{a + c} \times \overline{a - c} = AH \times HC = \overline{HB}^2 = ff$ (n°. 315).

Et que . . . $4b + 2c = 2HC + 2OH = 2a$, on aura . . . . . $x = \frac{ff}{4a}$,

d'où l'on déduit $4a : f :: f : x$ ou $2AC : HB :: HB : x$. Ce qui donne lieu à cette conſtruction.

Sur le prolongement de l'ordonnée HB, on prendra de H en K une partie $HK = 2AC = 4a$; on prolongera l'abſciſſe HC en L, de façon que l'on ait $HL = HB = f$; on portera cette même ordonnée HB de H en T ſur la droite HK; enfin ayant joint les points K, L par la droite KL, on menera à cette droite par le point T une parallele TS qui, rencontrant HL en S, déterminera la partie $HS = x$.

Car par la conſtruction (n°. 267) $HK : HL :: HT : HS$.

Et parce que $HK = 4a$, HL ou $HT = f$,

. . . . . $4a : f :: f :$ HS ou x,

Ayant déterminé HS = RQ = QE = QN, on aura la valeur de OQ = OE − QE = OC − HS, en retranchant du rayon OC ou OE la partie HS.

On connoîtra donc dans le triangle rectangle OQS, qui a pour ſommet le centre Q cherché, le côté OS, & la grandeur de l'hypothénuſe OQ, enſorte que l'on déterminera le centre Q cherché en menant d'abord par le point S une parallele SQ à HB, & en décrivant enſuite du centre O avec un rayon = OC − HS, un arc qui coupe la parallele SQ. Le point Q d'interſection ſera le centre du cercle RNE qui touchera les côtés du triangle mixtiligne BHNCE.

ARTICLE II.

Problêmes déterminés du ſecond degré.

PROBLÊME I.

329. 679. *Couper une droite* AB *donnée en un point* C *en deux parties* AC, CB *réciproques à deux droites* MN, NQ *données; c'eſt-à-dire, de façon que l'on ait* . . . . . AC : MN :: NQ : CB.

SOLUTION.

La droite AB étant exprimée par a, l'une AC de ſes parties par x, l'autre CB par $a - x$, la droite MN par b, NQ par c, on aura, par la ſuppoſition,

. . . . . $x : b :: c : a - x$.

Donc (n°. 252) . . . $bc = ax - x^2$.

En tranſpoſant . . . $x^2 - ax = -bc$.

En ajoutant à chaque membre $\frac{1}{4}a^2$ quarré de la moitié du coefficient d'x dans le ſecond terme . . .

. . . . . $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - bc$.

Enfin en prenant la racine quarrée de chaque membre . . . . . $x^2 = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

Ce qui donne la conſtruction qui ſuit.

n cherchera (n°. 373) entre MN=b, & NQ=c, moyenne proportionnelle géométrique NT, pour leur de $\sqrt{bc}$.

ant prolongé NQ de façon que l'on ait NO AB = $\frac{1}{2}a$, & décrit du centre O, & avec le n ON un arc de cercle NVS, qui coupe la demi-nférence MTQ, on menera par l'extrêmité T moyenne proportionnelle NT, une droite TS lele à NO, & qui coupe l'arc NVS aux points S, on aura TV, & TS pour la double valeur d'x e AC, ſelon que ce ſegment AC ſera plus petit lus grand que le ſegment CB.

our le démontrer, ſoit mené du centre O le rayon , & une perpendiculaire OR ſur VS, on aura 118) VR = RS; VO = NO = TR = $\frac{1}{2}a$; = NT = $\sqrt{bc}$ (n°. 314, 253).

e triangle rectangle VRO donnera (n°. 365)

. . . $VR = \sqrt{\overline{VO}^2 - \overline{RO}^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

onc ſi de TR = $\frac{1}{2}a$, on retranche VR . . .

TR — VR ou TV ſera = $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

à TR = $\frac{1}{2}a$, on ajoute RS = VR . . .

. TR + RS ou TS ſera = $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$.

REMARQUE.

80. 1°. L'équation . . . $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$ itre que ſi le rectangle bc des deux droites MN, données, eſt plus grand que le quarré $\frac{1}{4}a^2$ de la tié de la droite AB qu'il faut couper en parties ré-oques aux deux droites MN, NQ, le problême impoſſible : car alors on aura, dans le radical $\frac{1}{4}a^2 - bc$, une quantité négative ſous le ſigne $\sqrt{}$; ui donne une racine imaginaire.

a conſtruction de cette équation montre auſſi que

le problême ſeroit impoſſible dans le même cas ; c'eſt-à-dire, en ſuppoſant $bc > \frac{1}{4}a^2$, ou $\sqrt{bc} > \frac{1}{2}a$: car alors la moyenne proportionnelle NT qui eſt $= \sqrt{bc}$, ſeroit plus grande que le rayon $ON = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$: par conſéquent ayant du centre O avec le rayon ON, décrit l'arc NVS, la parallele TS à NO que l'on meneroit de l'extrêmité T de la moyenne proportionnelle, ne couperoit ni ne toucheroit point l'arc NVS.

2°. Si l'on fait . . . . . $bc = \frac{1}{4}a^2$,

l'équation . . . . $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - bc}$,

devient . . . . . $x = \frac{1}{2}a$.

Ce qui montre que le ſegment AC cherché ſera, dans cette ſuppoſition, la moitié de la droite AB.

La conſtruction montre la même choſe dans la même ſuppoſition.

Car ſi $bc = \frac{1}{4}a^2$, $\sqrt{bc}$ ſera $= \frac{1}{2}a$.

C'eſt-à-dire, que la moyenne proportionnelle NT = OR, ſera égale au rayon $ON = \frac{1}{2}AB$; & la parallele TR qui eſt égale à ON, ne fera que toucher la circonférence à l'extrêmité R de OR qui devient alors le rayon ; ainſi TV, en devenant TR, ſera égal à $\frac{1}{2}AB$.

PROBLÊME II.

331. 681. *Couper une droite* AB *donnée en un point* C *en moyenne & extrême raiſon ; c'eſt-à-dire, de façon que l'on ait* . . . . . $\therefore AB : AC : CB$.

SOLUTION.

La droite AB étant déſignée par a, ſa médiane AC par x, ſa ſeconde partie CB par $a - x$.

On aura, par la ſuppoſition, $\therefore a : x : a - x$.

Donc (n°. 253) $x^2 = a^2 - ax$, ou $x^2 + ax = a^2$.

En ajoutant à chaque membre $\frac{1}{2}a^2$ . . . . . ,

. . . $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$.

Et en extrayant la racine quarrée de chaque membre . . . . . $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

Ce que l'on pourra conſtruire comme il ſuit.

A l'extrêmité A de la droite AB, on élevera ſur AB une perpendiculaire $AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$; on menera l'hypothénuſe BD; on retranchera de cette hypothénuſe la partie $DE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$; la partie reſtante EB ſera la valeur d'x, c'eſt-à-dire, la médiane cherchée que l'on portera ſur la droite AB de A en C.

Pour démontrer que la partie EB eſt la valeur d'x, on conſidérera que dans le triangle rectangle ABD (n°. 365) . . . . $DB = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2}$.

Et parce que $AB = a$, $AD = \frac{1}{2}a$ . . . . . $DB = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{1}{4}a^2}$.

Donc en retranchant de chaque membre $DE = \frac{1}{2}a$, on aura . . . $BD - DE$ ou $EB = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

PROBLÊME III.

682. *Etant donnée la médiane* AC *d'une droite* AB *diviſée en moyenne & extrême raiſon, trouver cette droite.* Fig. 33

SOLUTION.

La médiane AC donnée étant exprimée par a, la droite entiere AB cherchée par x, ſa moindre partie par $x - a$, on aura, par la ſuppoſition, $\therefore x : a :: a : x - a$.

Donc (n°. 253) . . . . $x^2 - ax = a^2$.

En ajoutant à chaque membre $\frac{1}{4}a^2$ . . . . . $x^2 - ax + \frac{1}{4}a^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{5}{4}a^2$.

Et en extrayant la racine quarrée $x = \sqrt{\frac{1}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$.

Pour conſtruire cette valeur d'x à l'extrêmité A de la médiane $AC = a$, on élevera ſur AC une perpendiculaire $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$, on menera l'hypothé-

nuſe CD ; enfin on prolongera AD en B, en faiſant le prolongement DB égal à l'hypothénuſe DC, & AB ſera la valeur d'x, c'eſt à-dire, la droite entiere AB cherchée.

Car dans le triangle rectangle CAD (n°. 365)

. . . . . $CD = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2}$.

Et parce que $AC = a$, $AD = \frac{1}{2}a$ . . .

. . . . . $CD = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{5}{4}a^2}$.

Donc en ajoutant à chaque membre $AD = \frac{1}{2}a$

. . . . $CD + AD = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$.

Et comme on a fait $BD = CD$ . . . .

. . . $DB + AD$ ou $AB = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} + \frac{1}{2}a$.

REMARQUE.

683. Comme il eſt démontré (n°. 303) que le côté du décagone régulier inſcrit dans un cercle, eſt la médiane du rayon diviſé en moyenne & extrême raiſon, on a dans la conſtruction du problême précédent la maniere de déterminer le rayon du cercle, lorſque l'on a le côté du décagone.

PROBLÊME IV.

p. 333. 684. *Etant donné le rayon* OA *d'un cercle, avec le côté* AB *du décagone régulier inſcrit dans ce cercle, trouver le côté* AD *du pentagone régulier inſcriptible au même cercle.*

SOLUTION.

Soit mené à l'extrêmité B du côté AB du décagone le rayon OB qui ſera perpendiculaire ſur le côté AD du pentagone, & le coupera en deux également (n°. 118).

Soit exprimé le rayon $OA = OB$ par a, le côté AB du décagone par b, le côté AD du pentagone par

x, AC ſera . . . . . $\frac{1}{2}x$.

cauſe du triangle rectangle ACO, on aura (n°.

) . . . $CO = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}$.

conſéquent BO—CO ou BC, ſera $a - \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}$.

ela poſé :

rénant la valeur de $\overline{AB}^2$ dans le triangle rectangle

, on aura (n°. 304) . . . $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$,

n ſubſtituant les valeurs algébriques . . . .

$b^2 = a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} + a^2 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2$,

$b^2 = 2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2}$,

$2a\sqrt{a^2 - \frac{1}{4}x^2} = 2a^2 - b^2$.

t en élevant chaque membre au quarré . . .

. . $4a^4 - a^2x^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$,

d'où l'on déduit . . . $x^2 = 4b^2 - \frac{b^4}{a^2}$.

Maintenant ſi on ſe rappelle que le côté b du dé-

ne eſt la médiane du rayon a diviſé en moyenne

trême raiſon, & que l'on prenne la valeur de

médiane b dans la ſolution du problème II. (n°.

), on aura . . . $b = \sqrt{\frac{5}{4}a^2} - \frac{1}{2}a$.

t par conſéquent $b^2 = \frac{6}{4}a^2 - a\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ . . . A.

. . . . . $b^4 = \frac{14}{4}a^4 - 3a^3\sqrt{\frac{5}{4}a^2}$ . . . B.

dans l'équation $x^2 = 4b^2 - \frac{b^4}{a^2}$, on met à la

e de b^2 ſa valeur priſe dans l'équation A; & à la

e de b^4 ſa valeur priſe dans l'équation B, & qu'en-

on réduiſe, on aura enfin $x^2 = a^2 + b^2$,

e qui montre que le quarré du côté AD du pen-

ne régulier eſt égal à la ſomme des quarrés du

, & du côté du décagone, d'où l'on déduit la

truction que l'on a déja donnée (n°. 370).

PROBLÊME V.

685. *Un demi-cercle* BED, *& un point* A *ce demi-cercle étant donnés de position ſur trouver un point* P *ſur la circonférence* BED *quel & par le point* A *ayant tiré la droite* APQ *tie* PQ *compriſe dans le cercle ſoit égale au ra du cercle.*

SOLUTION.

Puiſque le demi-cercle BED & le point A ce demi-cercle ſont donnés, il eſt évident qu nant par le point A & par le centre C la sécan cette ſécante ſera connue, cela poſé.

La droite connue AD étant déſignée par a, tie connue AB par b, le rayon BC = PQ par poſition, par c; AP par x, AQ = AP + PQ pa on aura par la propriété du cercle (n°. 318)

. . . . . $a : c + x :$

Donc (n°. 252) . . . $x^2 + cx$

En ajoutant à chaque membre $\frac{1}{4}c^2$ . .

. . . . $x^2 + cx + \frac{1}{4}c^2 = ab +$

En extrayant la racine quarrée . . .

. . . . . $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{a}$

Pour conſtruire cette équation, du point A nera la tangente AE; ce qui donnera (n°.

. . . . . $\overline{AE}^2 = AB \times AD$

Du point E d'attouchement on tirera le rayo & ayant fait $EK = \frac{1}{2}EC = \frac{1}{2}c$, on menera l thénuſe AK; ce qui donnera (n°. 365) .

. . . $AK = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EK}^2} = \sqrt{ab +}$

On portera KE ſur AK de K en R, pou

$AR = AK - KR = AK - \frac{1}{2}c = \sqrt{ab + \frac{1}{4}c^2}$

Enfin on décrira du point A par le point R

RP qui coupe la circonférence, le point P d'interſection ſera le point demandé. Car AP ſera évidemment égal à AR, & par conſéquent égal à $\sqrt{ab+\frac{1}{4}c^2}-\frac{1}{2}c$.

Ce qu'il falloit démontrer.

PROBLÊME VI.

686. *Deux droites indéfinies* AB, RS *qui ſe coupent en quelque point* H, *étant données de poſition, mener par un point* D *donné ſur le même plan, une troiſieme droite* DF *qui comprenne avec les deux premieres un triangle* HMF *égal à un triangle* T *donné.* Fig. 33 336, 33 338.

SOLUTION.

Suppoſant le problême réſolu, ſoit menée par un point quelconque F de l'une AB des deux droites données de poſition, & par le point donné D, une droite DF qui comprenne avec les deux droites AB, RS données, un triangle HMF que l'on ſuppoſera égal au triangle T donné.

Ayant auſſi par le même point donné D, mené une droite DP parallele à RS, & qui rencontre l'autre ligne AB donnée en un point P, ſoit converti le triangle T en un autre PDQ de même ſurface (n°. 448), dont le ſommet ſoit au point donné D, & dont la baſe PQ ſoit priſe ſur la ligne AB, depuis le point P déterminé par la parallele PD.

Cette conſtruction donnera les proportions qui ſuivent :

D'abord PD étant parallele à HM, on a (n°s 267, 23) . . . triangle HMF : PDF :: $\overline{HF}$: $\overline{PF}$.

Les triangles PDQ, PDF ayant leur ſommet au même point D, & leurs baſes ſur AB, on a enſuite (n°. 419) . . . triangle PDQ : PDF :: PQ : PF.

D'où l'on déduit . . . ∴ PQ : F

Ainſi le point H d'interſection des deu: AB, RS données de poſition, étant donné l'on aura par le point donné D mené juſqu contre de AB une droite PD parallele à avoir le point P auſſi déterminé, & (qu'aya triangle PDQ égal au triangle T donné, pour hauteur la diſtance du point donné D à AB), on aura porté ſur AB ſa baſe PQ d pour avoir le troiſieme point Q déterminé l'on aura ſur AB trois points déterminés P & que la ſeule poſition du point F ſur ce droite ſera inconnue, le problême ſe rédu lui-ci.

Trois points P, Q, H étant donnés ſur u AB, trouver ſur cette même ligne un quatrie F, tel que l'on ait . . . ∴ PQ :

On va réſoudre ce problême, 1°. en ſuppo *gures 336, 337*, le point donné D dans l'an ce qui rend le point P le premier; 2°. en ſ *Fig. 338*, le point D donné dans l'angle I qui rend le point H le premier.

Lorſque dans chacune de ces ſuppoſitions

données de position, un triangle HMF égal au triangle T donné.

PROBLÊME VII.

687. *Trois points* P, Q, H *étant donnés sur une même droite, trouver sur cette même ligne un quatrieme point* F, *tel que l'on ait* . . . ∴ PQ : HF : PF. *Fig.* 339, 340, 341

SOLUTION.

Soit fait . . . . . $\begin{cases} PQ = a \\ PH = b \\ HF = x. \end{cases}$

Si le point P eſt le premier, *Figures* 339, 340, on aura . . . . $PF = PH + HF = b + x.$

Si, *Figure* 341, le point H eſt le premier, on aura . . . . . $PF = HF - HP = x - b.$

Faiſant donc dans la proportion ∴ PQ : HF : PF $PQ = a$, $HF = x$, $PF = b + x$ ou $x - b$, on aura $\begin{cases} \text{en ſuppoſant le point P le 1}^{er} \therefore a ; x : b + x, \\ \text{en ſuppoſant le point H le 1}^{er} \therefore a : x : x - b. \end{cases}$

D'où l'on tire les équations . . . $\begin{cases} x^2 = ab + ax \\ x^2 = ax - ab, \end{cases}$

leſquelles étant réſolues donnent . . . . .

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + ab} = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a + b \times a}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 - ab} = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a - b \times a}$$

Ce que l'on conſtruira comme il ſuit :

On fera $HI = \frac{1}{4}PQ = \frac{1}{4}a$, & $HL = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}a$.

Et ſi PQ eſt plus grand que PI, comme dans les figures 339 & 341, on décrira un demi-cercle ſur PQ comme diametre, & par le point I on élevera une ordonnée IK.

Si au contraire PI eſt plus grand que PQ, comme dans la figure 340, on décrira un demi-cercle ſur PI comme diametre, & on élevera au point Q une ordonnée QK.

pole le point F le premier ; ce qui a donné

. . . . . $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a$

on aura . . . HF = HL + LF ou

Mais par la conſtruction . . . HI

Et parce que (n°. 314) $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$PI ou PH+HI :

ou en mettant les valeurs algébriques $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\frac{1}{4}a+$

. . . . . PK = $\sqrt{\frac{1}{4}}$

Donc HL + PK ou HF = $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}}$

Et dans la même ſuppoſition, *Figures* 339

aura $Hf = HL - Lf = HL - PK = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}}$

Dans la figure 341, où l'on a ſuppoſé le

premier, ce qui a donné $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a}$

on aura . . . HF = HL + LF o

Mais par la conſtruction . . . . H

Et parce que (n°. 314) $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$PI ou HI—HP :

ou en mettant les valeurs algébriques $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\frac{1}{4}a -$

. . . . . PK = $\sqrt{\frac{1}{4}}$

Donc HL + PK ou HF = $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}}$

Et dans la même ſuppoſition, *Figure*

aura $Hf = HL - Lf = HL - PK = \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}}$

donnent . . . . . $\left\{\begin{array}{l}\div\!\!\div PQ : HF : PF \\ \div\!\!\div PQ : Hf : Pf.\end{array}\right.$

il ſuit que dans le problême VI. où deux droites AB, RS qui ſe coupent étant données de poſition avec un point D dans le même plan, on propoſe de mener par le point D une droite qui faſſe avec les deux droites données AB, RS un triangle égal à un triangle T donné, il y aura auſſi deux ſolutions. *Fig.* 336, 337, 338.

C'eſt-à-dire, que dans les figures 336, 337, 338, où les trois points P, Q, H ſont déterminés ſur la droite AB, ayant trouvé les points F, *f*, tels que

. . . . . $\left\{\begin{array}{l}\div\!\!\div PQ : HF : PF \\ \div\!\!\div PQ : Hf : Pf.\end{array}\right.$

on pourra indifféremment par l'un ou l'autre des points F, *f*, & par le point donné D, tirer une droite DMF ou D*fm*; enſorte que le triangle *fm*H compris entre la droite D*fm* & les droites AB, RS données de poſition, ſera auſſi égal au triangle T donné; ce que l'on peut prouver ainſi :

DP étant parallele à RS, on a (nos 267, 423)

. . . . . $PD f : f H m :: \overline{Pf}^2 : \overline{Hf}^2$.

Les triangles PD*f*, PDQ ayant même hauteur (n°. 419) . . . . $PD f : PDQ :: Pf : PQ$.

Mais parce que . . . . $\div\!\!\div PQ : Hf : Pf$,

l'on a (n°. 427) . . . . $\overline{Pf}^2 : \overline{Hf}^2 :: Pf : PQ$.

Donc (n°. 245) $PD f : f H m : PD f : PDQ$.

Donc $f H m = PDQ = T$; ainſi le triangle *f*H*m* ſatisfera au problême comme le triangle HMF.

II.

689. Dans l'équation $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a - b \times a}$ trouvée en ſuppoſant le point H le premier, ſi on fait $\frac{1}{4}a$ plus petit que b, c'eſt-à-dire, ſi HP qui eſt $= b$, eſt plus grand que HI qui eſt $\frac{1}{4}PQ = \frac{1}{4}a$, la quan-

tité $\pm \sqrt{\frac{1}{4}a - b \times a}$, ſera évidemment imaginaire, & le problême ſera impoſſible.

338. Donc dans la figure 338, où le point donné D eſt dans l'angle RHB, ce qui rend le point H le premier, ſi le point donné D eſt tellement ſitué qu'en menant par ce point D la droite PD parallele à RS, & qui rencontre AB en un point P, la diſtance des points H & P ſoit plus grande que le $\frac{1}{4}$ de la baſe PQ du triangle PDQ que l'on aura fait égal au triangle T, en prenant ſon ſommet au point D, & ſa baſe PQ ſur AB depuis le point P, alors le problême ſera impoſſible.

III.

690. La ſolution du problême VI. (n°. 686) dans lequel deux droites qui ſe coupent étant données de poſition avec un point dans le même plan, on propoſe de mener par ce point une troiſieme droite *qui* comprenne avec les deux premieres un triangle égal à un triangle donné, peut ſervir, comme on va le voir, à retrancher une figure rectiligne d'une autre par une droite tirée dans cette derniere par un point donné.

342, Soit le point D donné en-dedans ou en-dehors du triangle RHB : ſi l'on veut mener par ce point une droite DF qui retranche de ce triangle une partie HMF égale à un triangle T donné, on pourra regarder les côtés RH, HB comme deux droites données de poſition, & le problême ſe réduira à mener par le point D une troiſieme droite DF qui comprenne avec les deux premieres un triangle HMF égal au triangle T donné.

344, 346. Si par un point D donné en-dedans ou en-dehors d'un quadrilatere REGB, on propoſe de mener une droite DF qui retranche de ce quadrilatere une partie

GF égal à un triangle T donné ; en ſuppoſant
a droite DF doive rencontrer les côtés oppoſés
GB, on prolongera ces côtés juſqu'à leur ren-
e en H, on fera un triangle X égal à la ſomme
iangles HEG & T (n°. 452), & regardant les
RH, HB comme deux droites données de poſi-
, le problême ſe réduira à mener par le point
é D une troiſieme droite DF qui comprenne
les deux premieres un triangle HMF égal au
gle X, ce qui donnera la partie EMFG évidem-
égale au triangle T donné.

ue l'on propoſe de mener par un point D donné
dans ou en-dehors d'un poligone Z une droite DF
etranche de ce poligone une partie MEKGF
à un triangle T donné.

ı ſuppoſant que la droite DF doive couper les
ER, GB, on prolongera ces côtés juſqu'à leur
ntre en H : on fera un triangle X égal à la ſom-
lu triangle T, & de la figure HEKG (nos 461,
, & regardant les droites RH, HB, comme
droites données de poſition, le problême ſe ré-
à mener par le point donné D une troiſieme
e DF qui comprenne avec les premieres RH, HB,
iangle HMF égal au triangle X, la partie MEKGF
évidemment égale au triangle T donné.

l'on propoſe de retrancher un quadrilatere ou
igure rectiligne quelconque d'une autre figure rec-
ıe, en menant une ligne droite par un point
é, on changera en triangle la figure qu'il faut re-
her, puis on retranchera ce triangle de la ſeconde
e, comme on vient de l'enſeigner.

PROBLÊME VIII.

ı. *Etant donné dans un triangle rectangle* ABC *Fig.* 34
mme AB + BC *des deux côtés de l'angle droit avec*

la perpendiculaire BP *abaiſſée du ſommet de l'a*
droit ſur l'hypothénuſe AC, *conſtruire ce triangle,*
à-dire, trouver l'hypothénuſe, & chaque côté de l'
droit.

SOLUTION.

La ſomme AB + BC des côtés de l'angle
ſoit exprimée par a, leur différence par y, AB
$\frac{a+y}{2}$, BC par $\frac{a-y}{2}$, la perpendiculaire BP p
& l'hypothénuſe AC cherchée par x.

On conſidérera que dans le triangle rectangle
cherché (n°. 304) . . . $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 +$

Et en ſubſtituant les valeurs algébriques, & en
duiſant, on a . . . . . $x^2 = \frac{a^2+}{2}$

D'où l'on tire . . . . $y^2 = 2x^2 - a^2$ . .

Les triangles ABP, ABC étant ſemblables (n°. 2
on a . . . . . AP : BP :: AC :

Et en ſubſtituant les expreſſions algébriques, on
ve . . . . . $\frac{a+y}{2} : b :: x : \frac{a-}{}$

Donc (n°. 252) . . . $bx = \frac{a^2-}{4}$

D'où l'on tire . . . $y^2 = a^2 - 4bx$.

Comparant à préſent les deux valeurs A, B c
il vient . . . $2x^2 - a^2 = a^2 -$.

Ce qui ſe réduit à . . . $x^2 + 2bx =$

Et ce qui donne . . . $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

D'où l'on déduit cette conſtruction.

On fera un triangle rectangle EDC, dont le
tés de l'angle droit ſoient ED $= b =$ BP, &
$= a =$ AB + BC; ce qui donnera (n°. 3
. . . . . EC $= \sqrt{a^2 +}$

On retranchera EH $=$ ED $= b$ de l'hypoth

t portant la partie reſtante HC de C en A ſur
on aura . . . AC ou $x = \sqrt{a^2 + b^2} - b$,
n ayant décrit ſur AC, comme diametre, un
:ercle ABC, on menera par le point E une
EB parallele à AC qui coupe la demi-circon-
e.
point B d'interſection ſera le ſommet du trian-
ns la ſuppoſition de AB $= \frac{a+y}{2}$.
point F d'interſection ſera le ſommet du trian-
rſque le côté AB ſera $\frac{a-y}{2}$.

Fin du Tome ſecond.

ERRATA du Tome ſecond.

Page 2, *ligne* 23, hauteur & profondeur, *liſez* hauteur
fondeur.
P. 6, *lig.* 18, compoſant, *lif.* compoſent.
P. 26, *lig.* 1, qui fait, *lif.* que fait.
P. 63, *lig.* 25, l'angle quelconque ACD, *lif.* l'angle q
que ACB.
P. 81, *lig.* 1, leur ſommet ſoit plus grand, *lif.* leur ſom
plus grande.
P. 93, *lig.* 3, ayant enſuite aligné le diametre horizontal
ajoutez, de façon que le plan du graphometre ſoit
au terrein.
P. 110, *lig.* 23, des points, *lif.* de points.
P. 112, *lig.* 31, FG, *lif.* FH.
P. 168, *lig.* 22, étant ainſi, *lif.* étant auſſi.
P. 171, *lig.* 13, en compoſant enſemble, *lif.* en compa
ſemble.
Ibidem, *lig.* 26, ſommet des triangles, *lif.* ſommet du
P. 178, *lig.* 8, Si on ſuppoſe, *lif.* 2°. Si on ſuppoſe.
P. 182, *lig.* 24, des triangles ACD, *acd*, *lif.* des
ABC, *abc*.
P. 184, *lig.* 5, l'angle BCA = *bca*, *lif.* l'angle DCA =
P. 185, *lig.* 19, deux droites AG, *ac*, *lif.* deux droites
P. 189, *lig.* 22, ſi l'on y joint les deux premieres, *li*
joint les deux premiers.
P. 196, vis-à-vis le n°. 302, liſez à la marge, *Fig.* 141
P. 198, *lig.* 1, a l'angle commun, *lif.* a l'angle C con
P. 215, *lig.* 8, la perpendiculaire EP, *lif.* la perpendicu
P. 219, *lig. avant-derniere*, l'angle ſon double, *lif.* l'an
double.
P. 222, *lig.* 4 & 5, moindre que l'angle ABD, *lif.* moi
l'angle ACB.
P. 223, *lig.* 23, la valeur des angles, *lif.* la valeur des
angles.
P. 226, *lig.* 13, mais la propriété des ſécantes, *lif.* ma
propriété des ſécantes.
Ibid. lig. 3, la baſe AB, *lif.* la baſe AC.
P. 233, *lig.* 5, on pourra, *lif.* on portera.
P. 243, *lig.* 20, *gs*, liſez *gf*.
P. 246, *lig. avant-derniere*, aux autres triangles, & que
cun, *lif.* aux autres angles, & que dans chacune.

91, depuis la ligne 5, *lif.* x à la place de y, dans les équations.

171, *lig.* 24, la différence CN — QM, *ajoutez* des diſtances.

181, *lig.* 27, lequel eſt égal au rayon, *lif.* lequel eſt égal (n°. 334) à la racine quarrée de la différence des quarrés du rayon, & de la moitié du rayon.

209, *lig.* 12, APC : *bpc*, *lif.* BPC : *bpc*.

242, *lig.* 23, de la droite donnée, *lif.* de la droite *ad* donnée.

247, *lig.* 9, triangles FDI, *lif.* triangles EDI.

374, *lig.* 8, perpendiculaire PB, *lif.* perpendiculaire PD.

379, *lig. derniere*, les centres de deux baſes, *lif.* les centres des deux baſes.

384, *lig.* 20, tirée dans cette face, *lif.* tiré dans cette face.

419, *lig.* 4, de même diametre que la ſurface, *lif.* de même diametre que la ſphere.

420, *lig.* 2, la demi-circonférence AEZ, *lif.* la demi-circonférence AEX.

421, *lig.* 18, ou 3 : 2, *lif.* ou 2 : 3.

424, *lig.* 2, leurs ſurfaces correſpondantes, *lif.* leurs faces correſpondantes.

431, *lig.* 28, ou les côtés, *lif.* ou les cônes.

453, *lig.* 26, *ajoutez* on réduira en pieds cubes les pouces de toiſe-cube, en les multipliant par 3.

492, *lig. avant-derniere*, $x^2 = \frac{1}{2}a$, &c. lif. $x = \frac{1}{2}a$, &c.

494, *lig. avant-derniere*, $\frac{1}{2}a^2$, *lif.* $\frac{1}{2}a^2$.

L'on a dit, ligne 4, n°. 4, *que le ſolide peut être conſidéré comme un amas de ſurfaces couchées les unes ſur les autres ; la ſurface, comme une ſomme de lignes poſées l'une à côté de l'autre ; & la ligne, comme une ſuite de points.* Cela n'eſt qu'une façon de conſidérer les choſes, & n'eſt point vrai dans la rigueur géométrique ; car la ſurface n'étant que le terme du corps, la ligne le terme de la ſurface, & le point le terme de la ligne, l'on ne peut point dire que le corps eſt compoſé de ſurfaces ; que la ſurface eſt compoſée de lignes, & la ligne de points. Les élémens du corps ne peuvent être que d'autres petits corps dans leſquels il peut être diviſé ; les parties qui compoſent une ſurface ne peuvent être que d'autres petites ſurfaces ; & les parties de la ligne ſont néceſſairement d'autres petites lignes : mais ſi l'on imagine la diviſion du ſolide, de la ſurface, & de la ligne pouſſée à l'infini, les tranches paralleles dans leſquelles le ſo-

Supplément de l'Errata du premier Volume.

Page 306, *ligne* 7, le poid 1500 liv. *liſez* le poid 500 livres.

P. 345, *lig.* 29, l'équation réſultante $x^2 + b$, *lig.* l'équation réſultante $x^2 + b = 0$.

P. 450, *ligne* 3, $y = \frac{2}{\mp p^2 + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}} - 1$, *liſez*

$$y = \frac{2}{\mp p + \sqrt{\frac{2c}{d} + p^2}} - a.$$

P. 451, *lig.* 6, $y = \frac{2c}{n} + x$, *liſ.* $y = \frac{2c}{n} - x$.

P. 452, *lig.* 3, $\frac{2c}{x - b} = y$, liſez $\frac{2c}{x + b} = y$.

P. 456, *lig.* 2, la racine quarrée de $p + q$, *liſ.* la racine quarrée de $p + \sqrt{q}$.

P. 460, *lig.* 14, $+ z^3$, *liſ.* $- z^3$.

P. 468, *lig.* 17, $\frac{u + d}{2d}$, liſez $\frac{\overline{u + d}^2}{2d}$.

P. 469, *ligne* 3, $- \frac{\overline{2d}}{\frac{a + b + c + u}{5d}} \times d^4$, liſez

$$- \frac{\overline{\frac{a + b + c + u}{5d}}}{\times 5d^4}.$$

P. 476, *lig.* 5, $1 + 2 \times n - 1$, *liſ.* $1 + 2 \times x - 1$.

Corrigez de même, page 477, *ligne* 8.

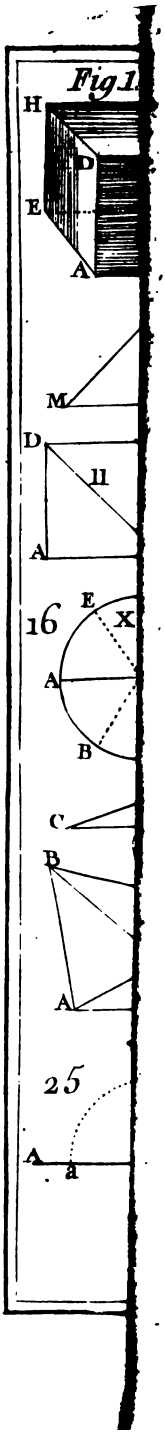
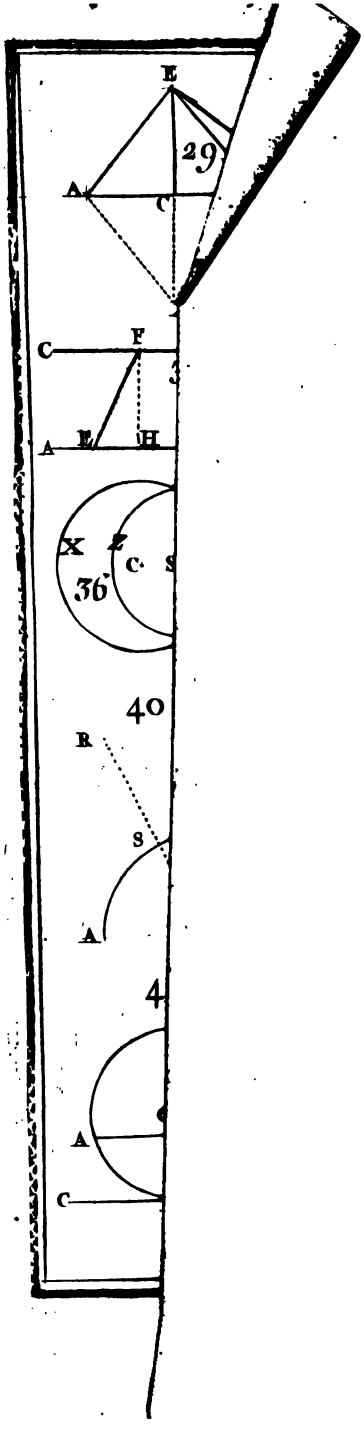
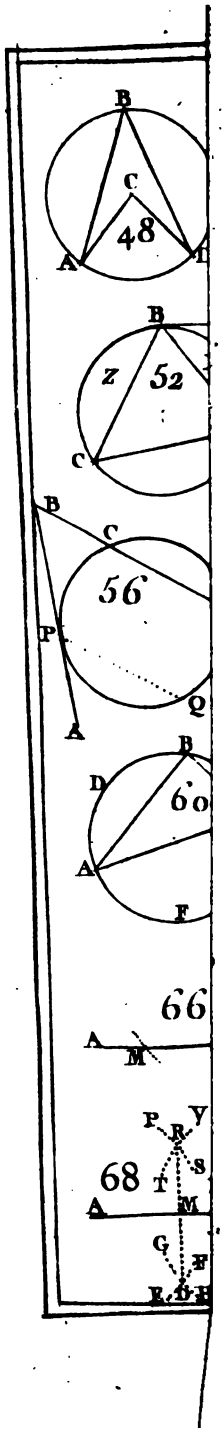
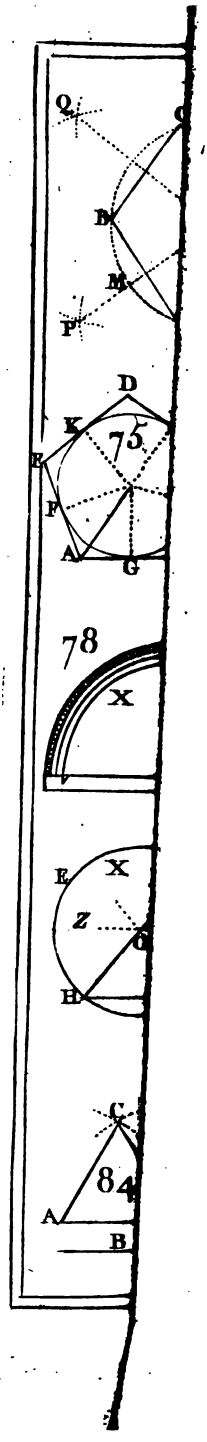
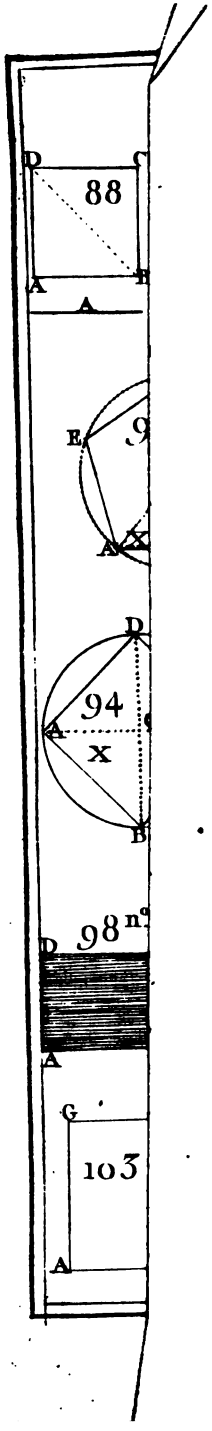


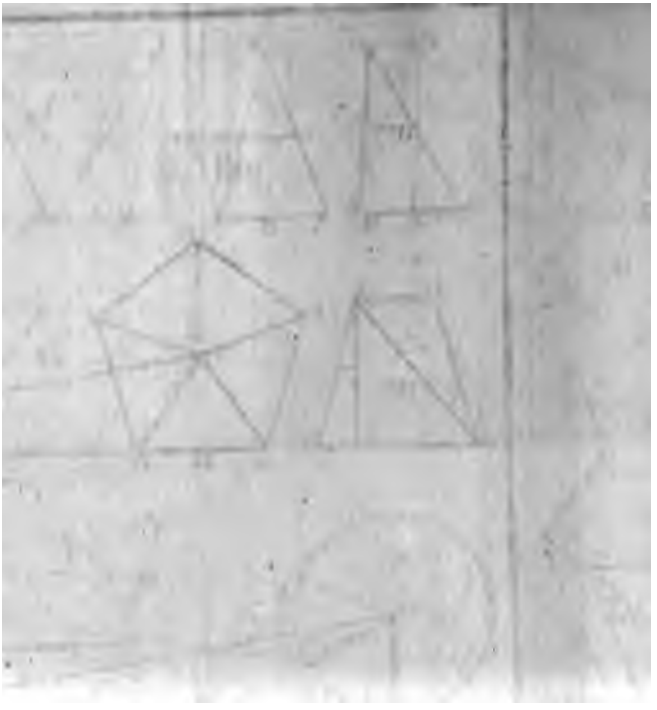
Fig 1.
H
D
E
A
M
D
11
A
16
E
X
A
B
C
B
A
25
A
a

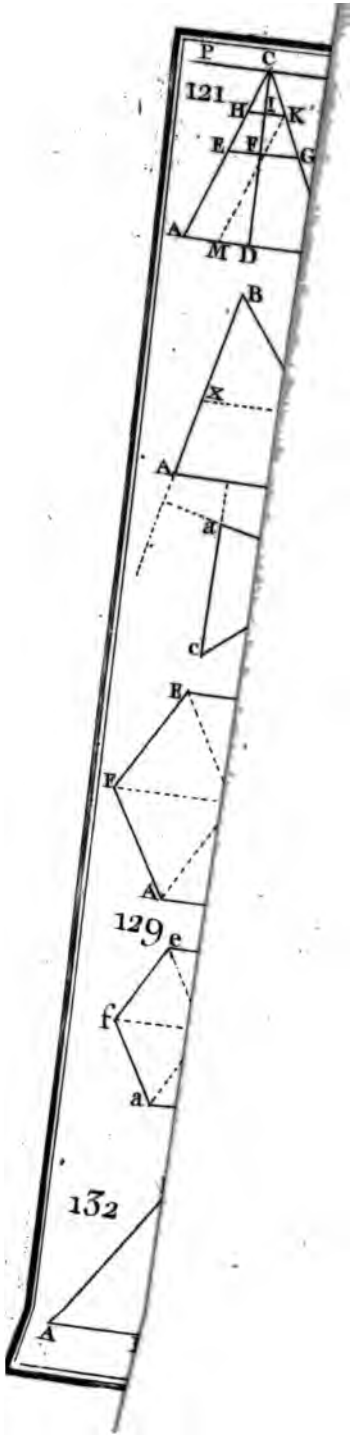

E
29
A
C
C
F
A
E
H
X
C.
S
36
40
R
S
A
4
A
C

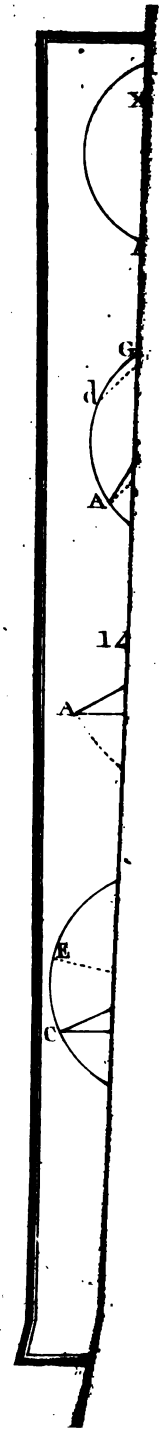

B
C
48
A
B
z
52
C
B
C
56
P
Q
A
B
D
60
A
F
66
A
M
P
R
Y
68
T
S
A
M
G
F
E
D
H

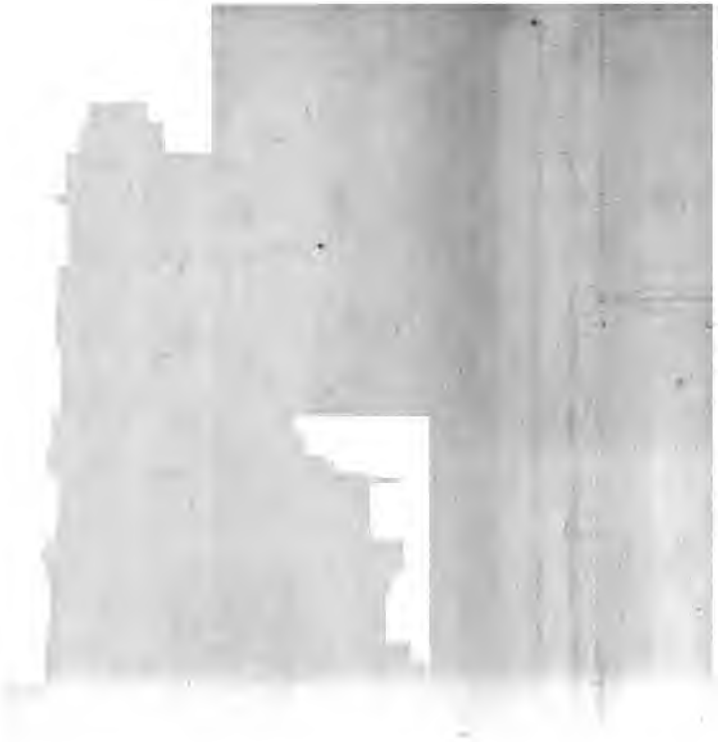

Q
C
B
M
P
D
K
75
E
F
A
G
78
X
E
X
Z
G
H
C
84
A
B

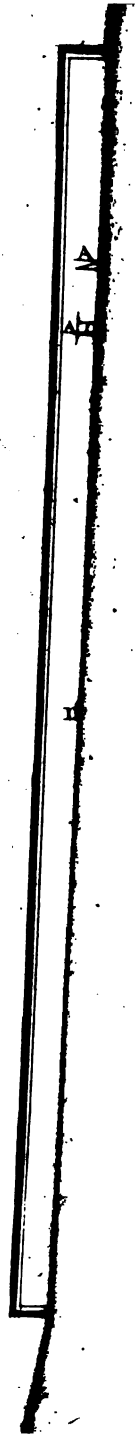

D
C
88
A
B
A
E
9
A
X
D
94
A
X
B
98nd
D
A
G
103
A



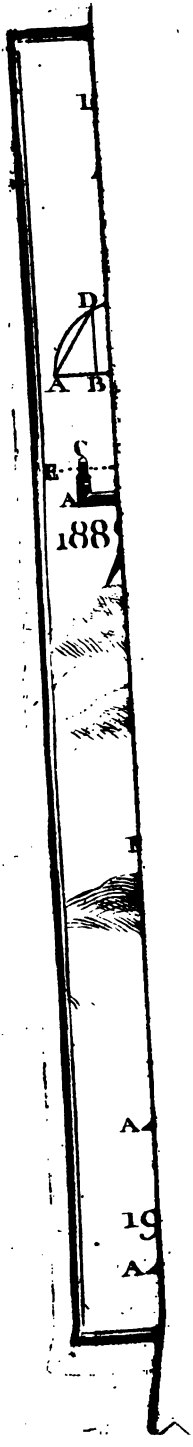
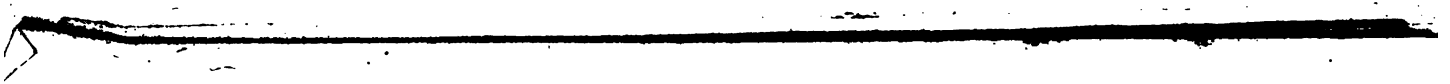
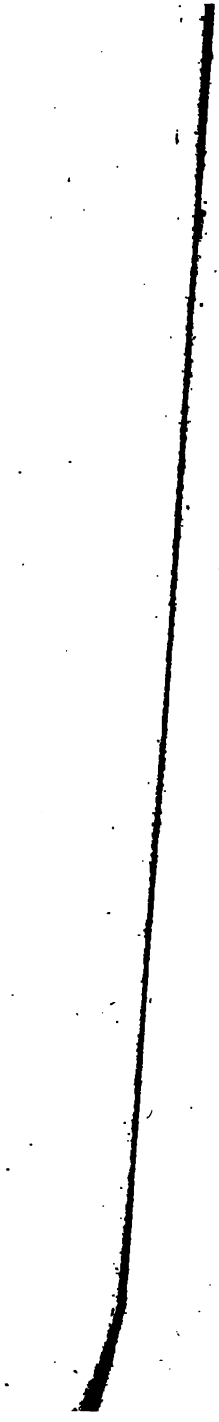
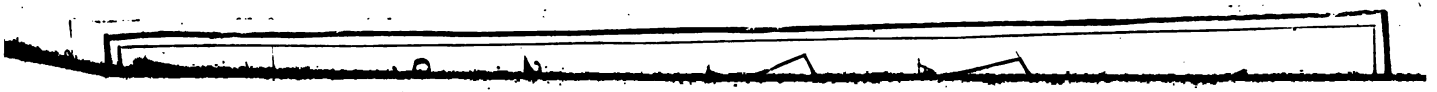
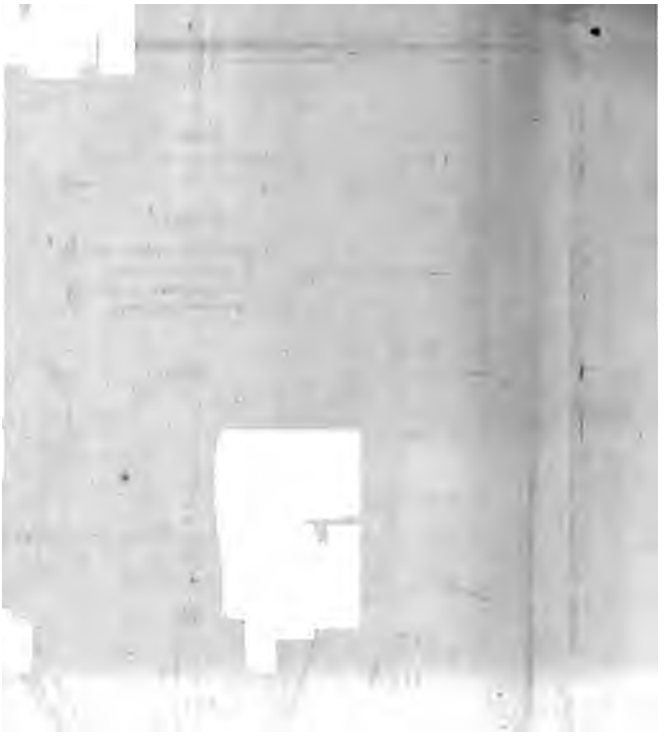
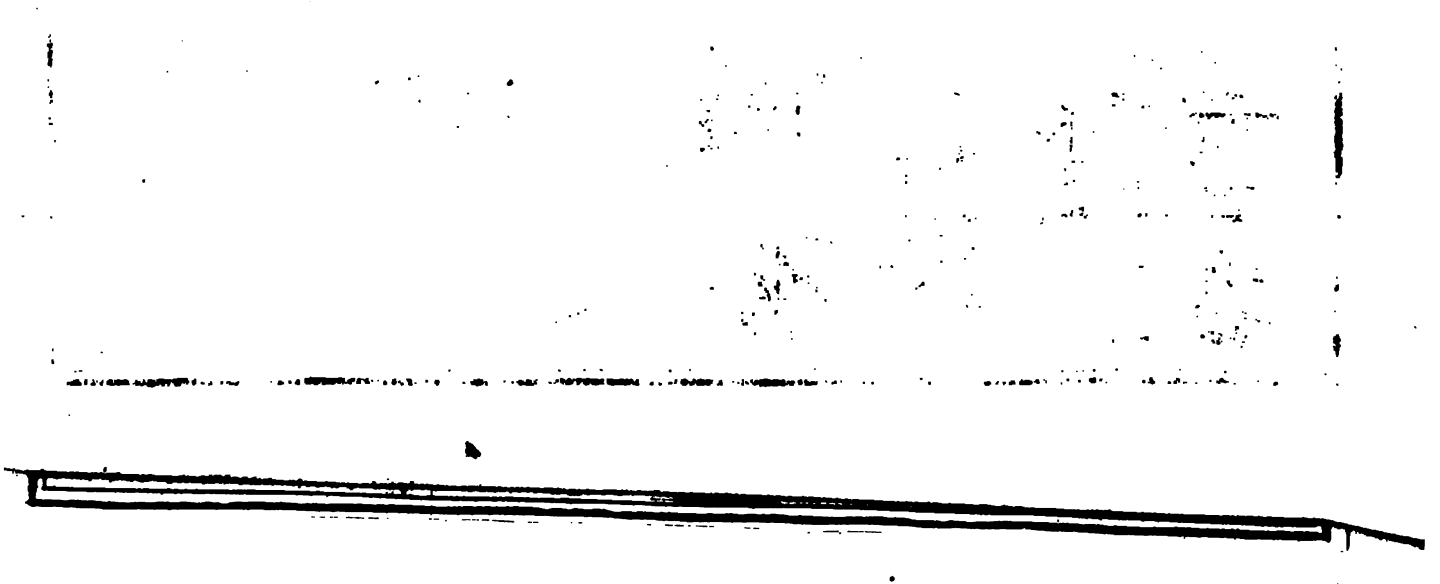
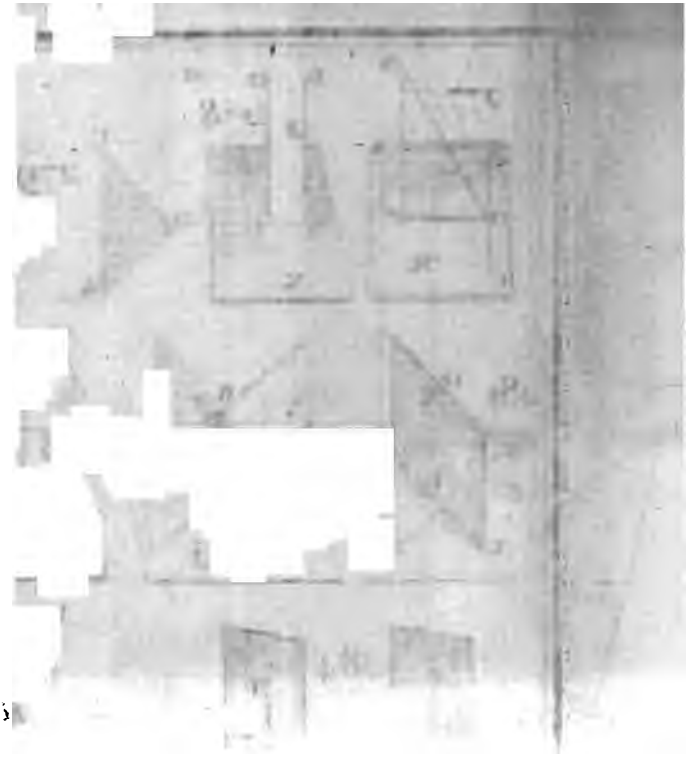
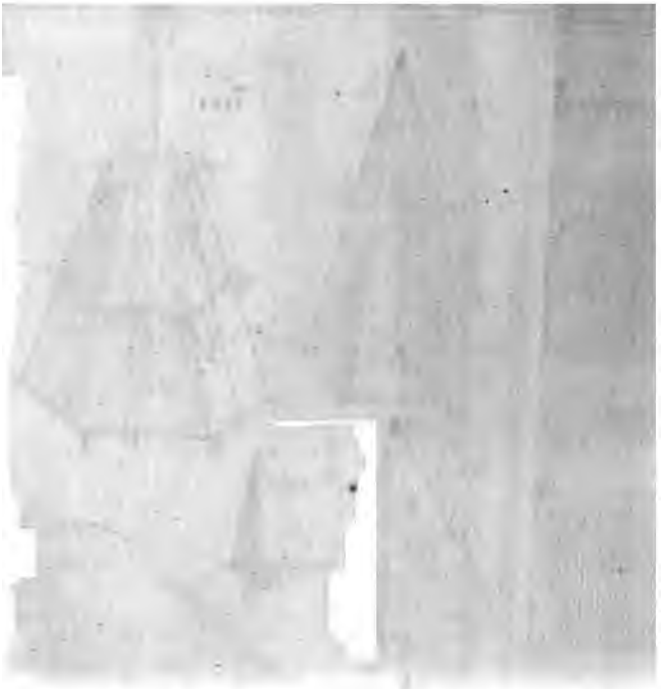
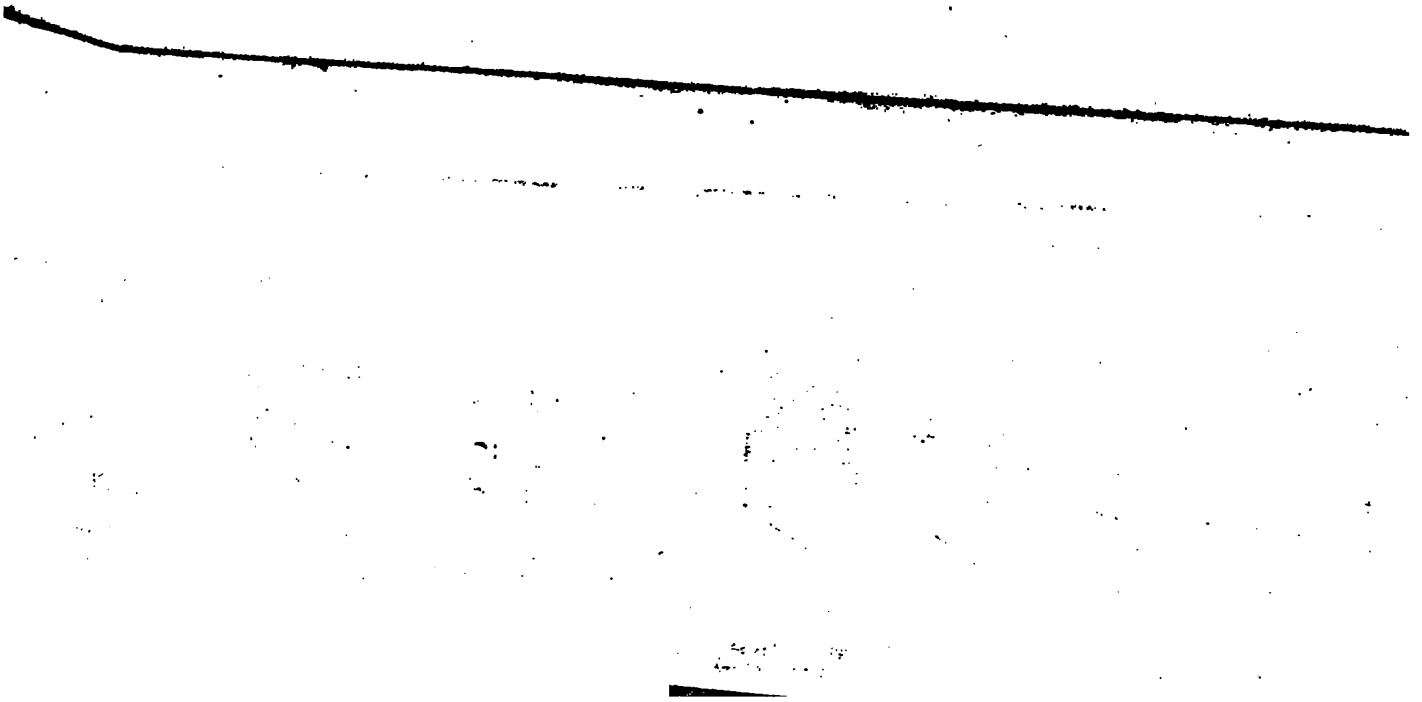
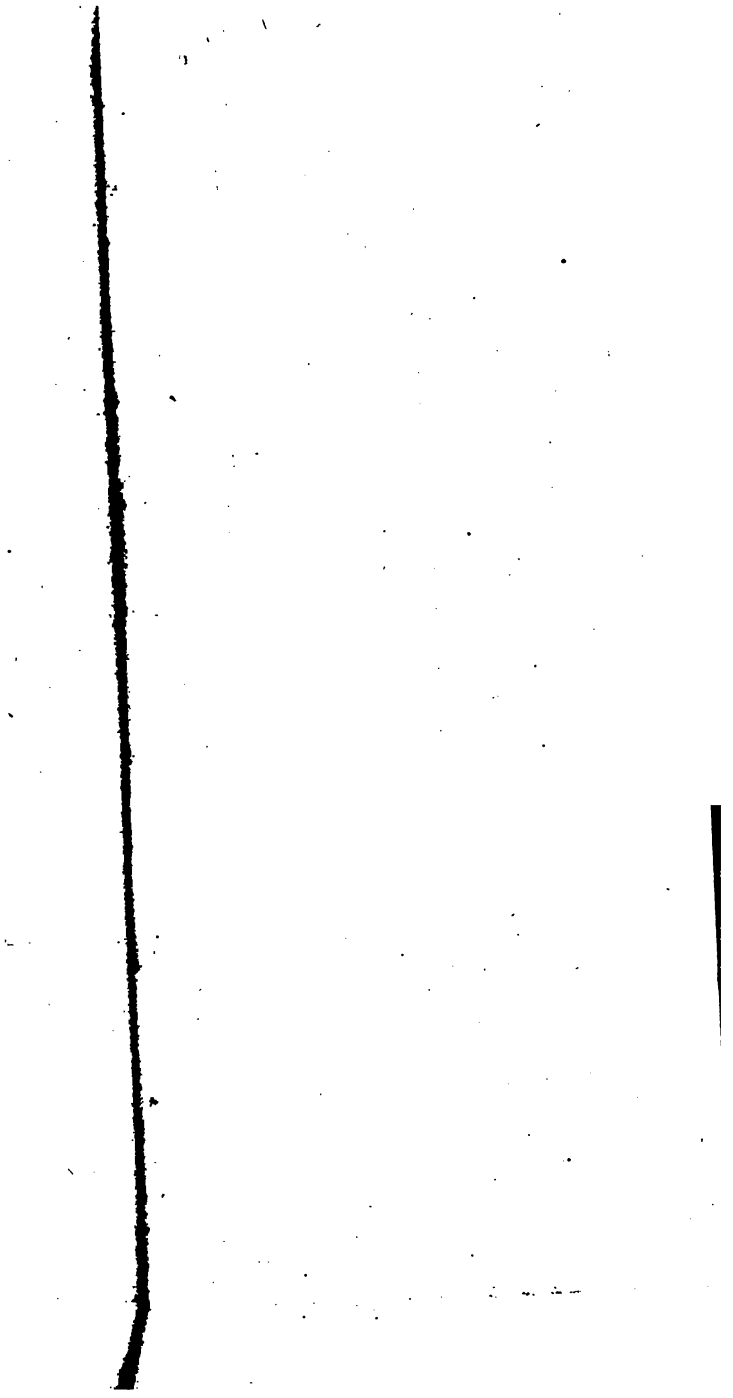
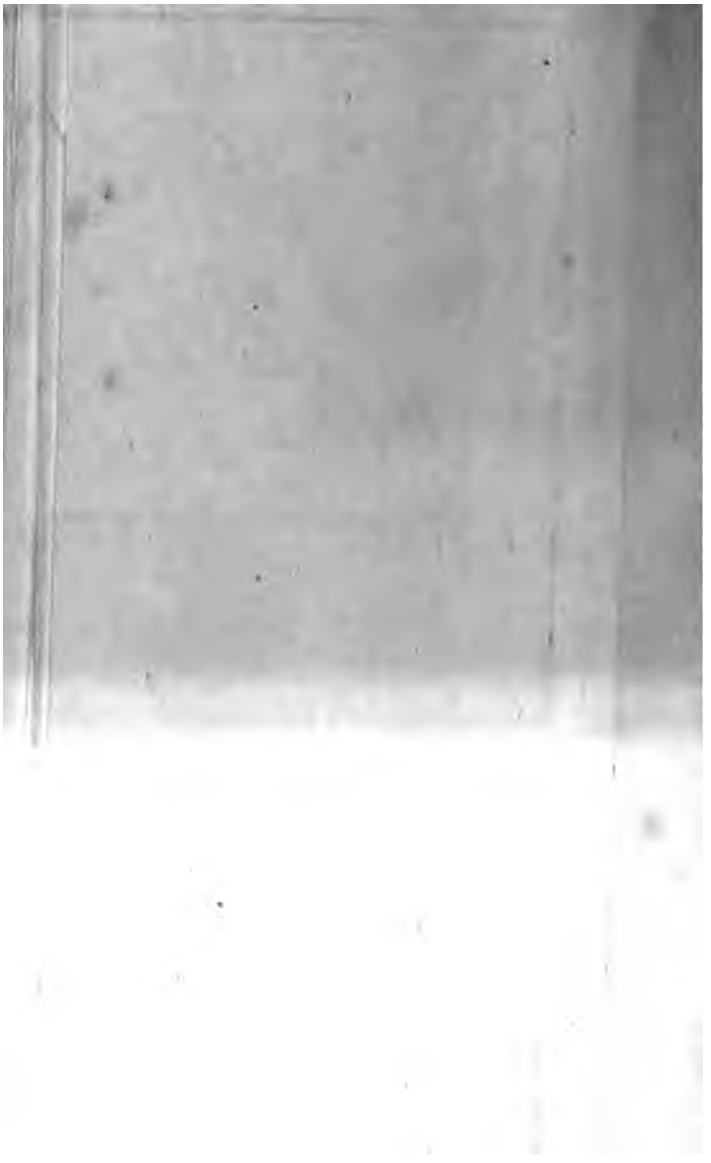

P
C
121
H
I
K
E
F
G
A
M
D
B
X
A
a
c
E
F
A
129
e
f
a
132
A


X
G
d
A
14
A
E
C




A
A
B

P
A
E
M
F
L
A
C
A
X
A
a
y
A


D
A B
C
E
A
188
E
A
19
A